Pensamiento Matemático III

GUÍA DE ACTIVIDADES

COBACH BC
COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE BAJA CALIFORNIA

DATOS DE IDENTIFICACIÓN

Nombre: ____

Plantel: ____

Grupo: __________ Turno: __________ Teléfono: ______________________

Tercer Semestre AGOSTO DE 2024

COBACH BC
COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE BAJA CALIFORNIA

Pensamiento Matemático III

Edición, agosto de 2024 (NEM)

Diseñado por:

Juan Ramón Islas Sambrano
Wendy Gastelum Angulo

En la realización del presente material, participaron:

JEFE DEL DEPARTAMENTO DE ACTIVIDADES EDUCATIVAS
Rodrigo André Llamas Caballero

PROGRAMA DE DESARROLLO EDUCATIVO
Alma Rosalía López Valdez
Diana Castillo Biceña
Angélica Huerta Sánchez
Alfredo Sánchez Orozco
Gabriela López Arenas

Este material fue elaborado bajo la coordinación y supervisión de la
Dirección de Planeación Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Baja California.
Blvd. Anáhuac #936, Centro Cívico, C.P. 21000, Mexicali, B.C., México.
www.cobachbc.edu.mx

ÍNDICE

- Presentación
- Definición y Propósitos del Recurso Sociocognitivo de Pensamiento Matemático
- Aprendizajes de Trayectoria
- Tabla Integradora de Conceptos Básicos de Tercer Semestre

	PÁGINA		PÁGINA
PROGRESIÓN 1	9	PROGRESIÓN 9	81
PROGRESIÓN 2	17	PROGRESIÓN 10	89
PROGRESIÓN 3	23	PROGRESIÓN 11	93
PROGRESIÓN 4	35	PROGRESIÓN 12	101
PROGRESIÓN 5	43	PROGRESIÓN 13	113
PROGRESIÓN 6	53	PROGRESIÓN 14	123
PROGRESIÓN 7	65	PROGRESIÓN 15	129
PROGRESIÓN 8	71		

REFERENCIAS	133

Presentación

Joven Bachiller:

La Nueva Escuela Mexicana tiene como eje fundamental la transformación social y plantea ir más allá de los conocimientos que debes adquirir además de desarrollar otros aspectos como son lo emocional, lo físico, lo moral, lo artístico, como parte de tu historia de vida, así como en lo social y en lo cívico; por esta razón se tiene como propósito fundamental educar integralmente.

Los jóvenes que el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) desea formar serán:

- Mexicanos que tengan amor al país, a su cultura e historia, ciudadanos responsables que se asuman como agentes de transformación social y orgullosos de su identidad nacional, pero conscientes de los procesos y problemas globales, y dispuestos a participar en actividades individuales, comunitarias, escolares y culturales.
- Formados en actitudes y valores, con pleno respeto a los derechos humanos y, principalmente, practicantes y promotores de la HONESTIDAD. Lo cual permitirá la convivencia de manera asertiva, respetuosa y solidaria, basada en el diálogo y el acuerdo pacífico.
- Estudiantes capaces de construir a lo largo de su trayectoria los conocimientos, las capacidades, habilidades y destrezas necesarias para conocer, comprender y explicar los diversos procesos sociales y naturales, y sean conscientes de los diversos caminos que han hecho posible que la humanidad tenga los niveles actuales de desarrollo, cultura y organización.

De acuerdo a lo anterior, las Guías de Actividades del Alumno de las diferentes Unidades de Aprendizaje Curricular (UAC) se elaboraron bajo el enfoque de progresiones; es decir contenidos que deberán abordarse de manera gradual a lo largo del semestre.

El presente documento fue elaborado pensando en ti, en tus necesidades e inquietudes, como un instrumento que te apoye ahora que estudias el bachillerato. Tiene la finalidad de que conozcas la forma de trabajo y los recursos didácticos indispensables en el bachillerato, en sus páginas encontrarás diversas temáticas, contenidos y actividades que son fundamentales para que paso a paso puedas alcanzar las metas de aprendizaje planteadas al interior de cada UAC.

Ahora te toca a ti, obtener el mayor provecho a esta guía de actividades, que es fruto del esfuerzo de un grupo de profesores especialistas en su área. Si lo aprovechas al máximo y lo combinas con el apoyo de tus maestras y maestros y de los demás recursos didácticos que están a tu alcance, seguramente ampliarás tus conocimientos y habilidades para construir un mejor futuro para ti, y coadyuvar al desarrollo de tu comunidad, de tu estado y de nuestro México.

¡Te deseamos éxito en esta importante etapa de tu formación, el bachillerato!

DEFINICIÓN Y PROPÓSITOS DEL RECURSO SOCIOCOGNITIVO DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Definición del recurso sociocognitivo

El pensamiento matemático es un recurso sociocognitivo que involucra diversas actividades desde la ejecución de operaciones y el desarrollo de procedimientos y algoritmos hasta los procesos mentales abstractos que se dan cuando el sujeto participa del quehacer matemático, pretende resolver problemas, usar o crear modelos, y le dan la posibilidad de elaborar tanto conjeturas como argumentos; organizar, sustentar y comunicar sus ideas.

Este recurso está descrito a través de cuatro categorías: procedural, procesos de razonamiento, solución de problemas y modelación e interacción y lenguaje matemático.

Propósitos del recurso sociocognitivo

El pensamiento matemático, en el MCCEMS, posibilita:

- Favorecer en el estudiantado el desarrollo de habilidades relacionadas con la observación, la intuición, la capacidad de conjeturar, la argumentación, la comunicación y socialización de inquietudes intelectuales y soluciones a problemas, así como la descripción de fenómenos o situaciones mediante el empleo del lenguaje matemático.

- Recuperar una perspectiva histórico-filosófica para ver a la matemática a partir de los contextos que dieron origen a los conceptos y procedimientos, de la integración de procesos de abstracción, argumentación y otros, dando un enfoque amplio contrario al enfoque mecanicista que anula la relevancia de la matemática.

- Responder a motivaciones que puede estar en el ambiente natural, social, cultural o en el sujeto pensante, para ampliar la visión de la matemática considerando su papel transformador, su dimensión cultural e intelectual que favorezca la formación integral del ser humano.

- Dar un sentido holístico a la formación matemática en la EMS para que el estudiantado alcance una educación de calidad, que incluya contenidos relevantes, actividades pertinentes y retadoras para lograr que le dé seguridad para tomar decisiones, favorezca una postura crítica y un estado emocional que lo impulse hacia el aprendizaje permanente y desarrolle una postura crítica en un marco de respeto a la condición y dignidad humana.

- Incorporar una visión centrada en el estudiante de tal forma que la articulación de saberes, conocimientos y habilidades tenga como eje director el progreso del estudiantado, respetando siempre la coherencia y consistencia de la disciplina.

APRENDIZAJES DE TRAYECTORIA

AT1. Valora la aplicación de procedimientos automáticos y de algoritmos para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).

AT2. Adapta procesos de razonamiento matemático que permiten relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades, y de la vida cotidiana).

AT3. Modela y propone soluciones a problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana) empleando lenguaje y técnicas matemáticas.

ATE4. Explica la solución de problemas en el contexto que le dio origen, empleando lenguaje matemático y lo valora como relevante y cercano a su vida.

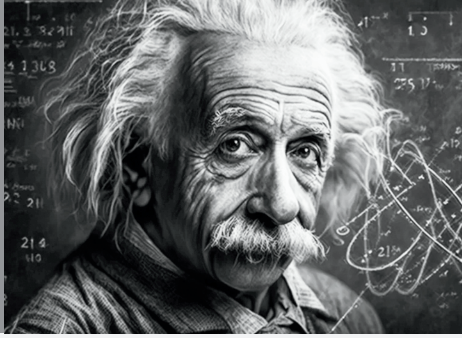
TABLA INTEGRADORA DE CONCEPTOS BÁSICOS DE TERCER SEMESTRE

RECURSO SOCIOCOGNITIVO: PENSAMIENTO MATEMÁTICO			
TERCER SEMESTRE: PENSAMIENTO MATEMÁTICO III			
METAS DE APRENDIZAJE		CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M1	Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas.	**C1** Procedural	**SC1.1** Pensamiento aritmético
M2	Integra métodos de diferente naturaleza (aritmética, algebraica, geométrica o variacional) en la solución de problemas (matemáticos de las ciencias naturales, experimentales y tecnologías, sociales, humanidades y de la vida cotidiana.		**SC1.2** Pensamiento algebraico
M3	Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas matemáticos y de otras áreas del conocimiento, mediante la verificación directa o empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.		**SC1.3** Elementos geométricos **SC1.4** Manejo de datos
M4	Observa y obtiene información de una situación o fenómeno (natural o social) para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a explicarlo.	**C2** Proceso de razonamiento	**SC2.1** Procesos cognitivos abstractos
M5	Desarrolla la percepción y la intuición para generar una hipótesis inicial ante situaciones que requieren explicación o interpretación.		**SC2.2** Pensamiento espacial y razonamiento visual
M6	Compara hechos, opiniones o afirmaciones categóricas o la posibilidad de ocurrencia de eventos para establecer similitudes y diferencias, organizándolos en forma lógicas o convenientes útiles en la solución de problemas.		**SC2.3** Pensamiento aleatorio
M7	Combina diferentes procesos de razonamiento matemático al plantear un modelo o resolver un problema o una situación o fenómeno natural, experimental o social e interpreta el resultado, la predicción y/o la manera de reducir el nivel de riesgo.		

TABLA INTEGRADORA DE CONCEPTOS BÁSICOS DE TERCER SEMESTRE

METAS DE APRENDIZAJE		CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M8	Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar el fenómeno estudiando en la solución de un problema.	**C3** Solución de problemas y modelación	**SC3.1** Uso de modelos
M9	Construye un modelo con lenguaje matemático y pone a prueba su utilidad para el estudio de un fenómeno (natural o social) o una situación problema.		**SC3.2** Construcción de modelos
M10	Explica procedimientos para la solución de problemas empleando lenguaje y técnicas matemáticas.		**SC3.3** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios
M11	Formula problemas matemáticos de su entorno o de otras áreas del conocimiento, a partir del cuestionamiento para resolverlos con estrategia, heurísticas, procedimientos informales o informales.		
M12	Esquematiza situaciones para su solución mediante el uso de datos numéricos, representación simbólica y conceptos matemáticos para dar un significado acorde con el contexto.	**C4** Interacción y lenguaje matemático	**SC4.1** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico
M13	Elige la forma de comunicar a sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema para la socialización de los conocimientos.		**SC4.2** Negociación de significados
M14	Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o a evaluación.		**SC4.3** Ambiente matemático de comunicación

PROGRESIÓN 1



Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo.

CATEGORÍAS	METAS DE APRENDIZAJE
C2. Procesos de intuición y razonamiento.	**M4.** Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.
SUBCATEGORÍAS	
SC2.1. Capacidad para observar y conjeturar.	

Contenidos específicos de la progresión
1.1 Evolución Histórica del Cálculo: 1.1.1. Aportaciones de matemáticos al cálculo. **1.2. Concepto intuitivo de variación promedio y variación instantánea.**

Descripción de la progresión:
En esta progresión se reconoce la importancia del Cálculo como disciplina matemática por su infinidad de aplicaciones en la ciencia, tecnología, áreas administrativas, entre otras. A través de diferentes actividades se pretende que las y los estudiantes conozcan el desarrollo del Cálculo a través del tiempo, así como las aportaciones que grandes matemáticos como Arquímedes, Leibniz, Newton, entre otros, realizaron para que esta disciplina se fortaleciera.

Evolución histórica del Cálculo

A través de la historia, el Cálculo como disciplina matemática ha tenido un sorprendente desarrollo, y hoy es considerada una poderosa herramienta que tiene múltiples aplicaciones en ingeniería, economía, administración, tecnología y en diversidad de aspectos en las ciencias.

A **Isaac Newton y Gottfried W. Leibniz** se les atribuye la invención del Cálculo, a partir de unificar el cálculo diferencial e integral y darle forma como disciplina matemática. Ambos matemáticos lo trabajaron de manera independiente, uno en Inglaterra, el otro en Alemania. El primero considerado un genio en la física clásica, mientras que Leibniz, el genio universal, se desarrolló con gran maestría en múltiples disciplinas.

Casi todos los grandes matemáticos, tanto de la antigüedad como del siglo XVII, aportaron algo en la construcción del cálculo, pero hacía falta que llegara alguien que le diera claridad a todos los conceptos y los unificara. Tanto Newton como Leibniz dieron ese soporte cualitativo, aportando un método general, aplicable a cualquier problema.

En definitiva el cálculo no hubiera alcanzado su desarrollo sin contar con la aportación de grandes matemáticos a través del tiempo, como lo veremos a continuación.

Arquímedes, sin duda, el más grande matemático e inventor de la antigüedad, desarrolló procedimientos para calcular el área del círculo, longitud de un segmento de parábola, volumen y área de la esfera y del cono, así como para determinar el valor más aproximado de π. Su método de aproximaciones o exhaustivo es un acercamiento al cálculo integral.

ARQUÍMEDES DESCARTES

Al inicio de la época moderna, el filósofo y matemático **René Descartes** se dio a la tarea de encontrar un método de pensamiento que diera coherencia al conocimiento. Para él, las matemáticas eran las indicadas para conducir a las ciencias a la verdad.

En el año de 1637 publicó su obra de mayor importancia en el área de las matemáticas, “La géométrie”, cuyo objetivo es lograr la unificación de la antigua geometría con el álgebra, de esta manera, junto con Pierre de Fermat, crearon la Geometría Analítica.

Pierre de Fermat realizó trabajos sobre problemas de máximos y mínimos, que es un tema fundamental en el estudio del cálculo diferencial, además de realizar aportaciones en la teoría de las probabilidades y en la teoría de números con su teorema de Fermat.

Años más tarde, el teólogo, profesor y matemático **Isaac Barrow**, contribuyó con sus cálculos de la tangente a una curva. En sus trabajos estableció que la derivación y la integración son procesos inversos.

De manera casi simultánea a Isaac Newton, pero de forma independiente, **Gottfried W. Leibniz** realizaba grandes aportaciones para la creación del Cálculo. Se le atribuye la invención de muchos de los símbolos matemáticos utilizados, tales como $\frac{dy}{dx}$ para la derivada, y el de $\int$ para la integral.

El destacado matemático, médico y filólogo **Johann Bernoulli,** nació en Basilea, Suiza, en 1667.

El abordó todo tipo de problemas de cálculo, incluyendo puntos de inflexión, longitud de curvas, series infinitas y técnicas de integración. Desarrolló el cálculo infinitesimal y escribió su primer libro de Cálculo entre 1691 y 1692.

Considerado como el más prolífico autor de matemáticas de todos los tiempos, **Leonard Euler** realizó contribuciones al cálculo en las funciones trascendentes, introduciendo el uso de la constante "e" como base de los logaritmos naturales. Demostró que "e" y e^2 son irracionales, descubriendo la relación $e^{i\pi} = -1$. La notación $f(x)$ para función matemática se debe a Euler.

El concepto de límite es el que dará mayor orden y claridad a esta disciplina del cálculo diferencial y en ello hay que reconocer a **Augustin Louis Cauchy,** quien se diera a la tarea de dar una definición precisa de "función continua". Y de igual manera, dar reconocimiento a **Georg Friedrich Bernhard Riemann**, de quien sobresalen sus trabajos de sumatorias y cálculo de área bajo una curva y la definición de integral definida, llamadas en su honor integral de Riemann.

Es demasiada extensa la lista de matemáticos que han hecho que esta disciplina tenga el rigor y claridad para explicar muchos fenómenos y procesos que nos rodean. Sin la aportación de éstos y otros matemáticos, la tecnología moderna y la ciencia no lograrían los avances que hoy tienen.

1 ACTIVIDAD Línea del tiempo: Actividad grupal

En coordinación con tu maestro elaboren una línea del tiempo en la que se describan los trabajos y aportaciones de los siguientes personajes y matemáticos que influyeron en la creación del Cálculo: Zenón, Arquímedes, René Descartes, Pierre de Fermat, Isaac Barrow; Isaac Newton, Gottfried W. Leibniz, Johann Bernoulli, Jakob Bernoulli, Leonard Euler, Augustin Louis Cauchy, Georg Friedrich Bernhard Riemann, Lagrange, Legendré, entre otros.

Incluye fotografía de los personajes y una breve descripción de su trabajo, no mayor a dos párrafos. Anotar fecha y lugar de nacimiento, estudios, aportaciones, datos curiosos o sobresalientes, etc.

2 ACTIVIDAD

Contesta brevemente cada una de las siguientes preguntas.

Responde...

1. ¿Cuándo y dónde nació Arquímedes?

2. ¿En qué consiste el método exhaustivo y de qué manera lo utilizó Arquímedes?

3. Explica la paradoja de Zenón: “Aquiles y la tortuga”.

4. ¿Quién es considerado como padre de la filosofía moderna y creador del sistema de coordenadas?

5. ¿A qué matemático se le consideró el príncipe de las matemáticas?

6. ¿A quién se le atribuye el teorema del binomio, la teoría del color, las leyes del movimiento, la ley de la gravitación universal y los elementos matemáticos que lo atribuyen como uno de los creadores del Cálculo (1665-1666)?

7. ¿Qué hermano de Johann Bernoulli también es considerado un genio de las matemáticas y que aportaciones tuvo?

8. **Matemático que nació en Suiza, aportó en el desarrollo de las funciones trascendentes, introdujo el valor de "e" como base de los logaritmos naturales.**

9. **A este matemático le debemos la idea de basar el Cálculo en el concepto de límite.**

10. **Matemático y físico alemán, considerado el mayor inventor de símbolos matemáticos y uno de los fundadores del cálculo.**

Variación promedio y variación instantánea

El cálculo requiere de un buen manejo de conceptos y procedimientos, algunos de estos son el concepto de límites, el cual veremos en las siguientes progresiones, el de función y el de variación, que sirven de base para explicar el cálculo diferencial.

Pendiente de una recta y velocidad o rapidez, pueden comprenderse mediante el concepto de variación.

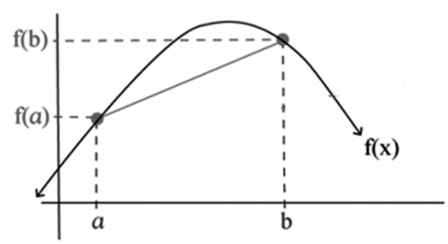
El cálculo como disciplina de las matemáticas, se ocupa del estudio de la variación y del movimiento, razón por lo cual se puede observar y describir la realidad en términos dinámicos. Los matemáticos de la antigüedad consideraban a la curva como un punto en movimiento.

Si deseamos describir cómo cambian las cantidades a lo largo del tiempo, es necesario determinar la tasa de cambio promedio o **variación promedio**. Mediante ella se encuentra qué tan rápido cambia una función con respecto a algo que cambia.

Para encontrar la variación promedio, dividimos el cambio en *y* por el cambio en *x*. Lo que significa calcular la pendiente de la recta secante que pasa entre dos puntos o la rapidez con que un cuerpo se desplaza entre dos puntos en un intervalo de tiempo.

$$Vp = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$Vp = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

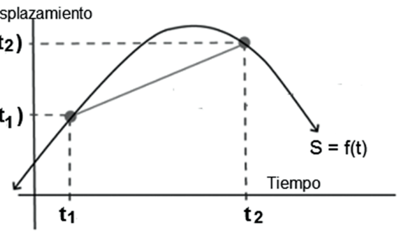


Variación promedio: pendiente de una recta

De igual manera, la variación promedio de un desplazamiento en relación al tiempo, descrito como rapidez, puede interpretarse con el esquema siguiente.

$$v = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$v = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$$



Variación promedio: desplazamiento en un intervalo de tiempo.

Ejemplos:

1. Hallar la variación promedio de la función $f(x)$- x^2+2, en el intervalo [-1, 2]

   Primeramente determinamos las coordenadas correspondientes de los puntos en ese intervalo, posteriormente calculamos la variación promedio o pendiente de la recta que corta en esos dos puntos.

   $$f(-1) = (-1)^2 + 2 = 1 + 2 = 3$$
   $$f(2) = (2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$

x	y
- 1	3
2	6

   $$Vp = m = \frac{6-3}{2-(-1)} = \frac{3}{3} = 1$$

   La variación promedio en el intervalo [-1,2] es 1.

2. Hallar la velocidad promedio o rapidez de un móvil que se desplaza de acuerdo a los datos registrados en la siguiente tabla.

Tiempo (segundos)	Distancia (m)
25	300
45	460

Se observa que a los 25 segundos había recorrido 300m y 20 segundos después ya había recorrido 460m desde el inicio de su recorrido.

Calcularemos la variación promedio de velocidad o rapidez en esos dos puntos.

$$Vp = r = \frac{460-300}{45-25} = \frac{160}{20} = 8m/s$$

Cuando se involucra el movimiento, la variable independiente es el tiempo t. La función de desplazamiento nos permite determinar su movimiento en un intervalo de tiempo, y utilizando la derivada de esa función podemos calcular su variación instantánea o velocidad instantánea, y su aceleración con la segunda derivada de la función, procedimientos que miraremos en las siguientes progresiones.

3 ACTIVIDAD

Responde...

1. Determina la variación promedio de la función $f(x) = 2x^2 - 3,$ en el intervalo [-2, 3].

2. Determina la variación promedio de la función $f(x) = -x^2 - 2x + 2,$ en el intervalo [-4,1]

3. Halla la variación promedio en el intervalo [-2, 2] de acuerdo a la tabla mostrada.

x	y
- 2	1
0	4
2	7

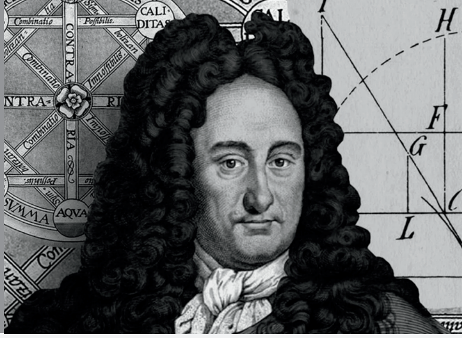
4. Una partícula se mueve de acuerdo a la ecuación de desplazamiento $f(t) = -t^3 + 4t^2 + 4t - 10$, ¿cuál es su variación de velocidad promedio en el intervalo [1.5, 4] minutos?

5. En mi camino a la ciudad, cuando llevaba 30 minutos de recorrido, la velocidad de mi automóvil era de 85 km/h. Exactamente a los 45 minutos de recorrido, la velocidad de mi auto era de 70 km/h. ¿Cuál es la velocidad promedio en este intervalo de tiempo?

La variación instantánea

- Cuando se calcula la pendiente de una recta secante (recta que toca dos puntos de la recta), se está calculando la variación promedio.
- Una recta secante se convierte en una recta tangente cuando la distancia entre los dos puntos es cero, de manera que la recta tangente toca un solo punto de la curva.
- Calcular la pendiente de la recta tangente equivale a calcular la variación instantánea.
- Determinar la rapidez de un móvil equivale a calcular la variación promedio de velocidad en un intervalo de tiempo y la distancia recorrida.
- Determinar la velocidad instantánea de ese móvil equivale a calcular la velocidad en un instante preciso de tiempo. Es su variación instantánea.

PROGRESIÓN 2



Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.

CATEGORÍAS	METAS DE APRENDIZAJE
C3. Solución de problemas y modelación. **C4.** Interacción y lenguaje matemático.	**M8.** Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.
SUBCATEGORÍAS	
SC3.1. Uso de modelos **SC4.1.** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico	**M12.** Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.

Contenidos específicos de la progresión

2.1. Problemas que dieron origen al cálculo diferencial.
2.1.1. Concepto intuitivo de la pendiente de una recta tangente a una curva.

Descripción de la progresión:

Dando continuidad al tema de la evolución del Cálculo, en esta progresión se presentan diferentes actividades para que las y los estudiantes reconozcan los principales problemas que originaron al Cálculo, problemas que los matemáticos de la antigüedad y del siglo XVII se dieron a la tarea de resolver mediante métodos infinitesimales, de los cuales, uno de ellos es el cálculo de la pendiente de una recta tangente a una curva.

Problemas que dieron origen al Cálculo

A través de la historia, el ser humano siempre ha tratado dar respuesta a las incógnitas que se le presentan, de comprender lo que sucede a su alrededor, de descubrir los secretos de la naturaleza, así como de adquirir mayor conocimiento que le permita resolver las problemáticas de su época. Este afán de descubrir y resolver dará pie a grandes avances en todas las áreas del conocimiento y de la ciencia.

En el área de las matemáticas, el Cálculo Diferencial tuvo su origen en la búsqueda de procedimientos que permitieran calcular la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto determinado de la misma, ya que anteriormente sólo podía calcularse la pendiente de una recta secante con procedimientos de geometría analítica. También fue tema de interés determinar el área bajo una curva o el volumen de cuerpos irregulares.

Ya desde la antigüedad los matemáticos griegos utilizaban métodos de agotamiento o exhaustivos para su cálculo.

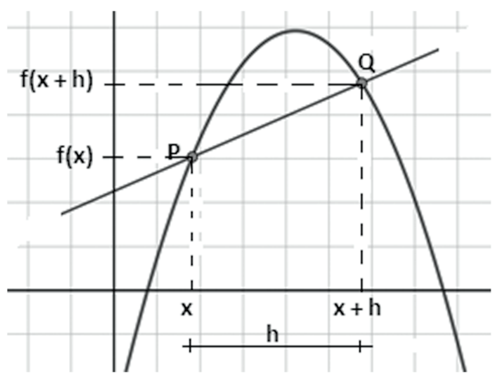
Primer problema: cálculo de la pendiente de una recta tangente a una curva.

Isacc Barrow, nació en Londres en el año de 1630, fue profesor de matemáticas de Cambridge en el año 1663. Uno de sus discípulos fue Isaac Newton.
Isaac Barrow describió un método para encontrar derivadas tomando tangentes a las curvas.

Para resolver el problema del cálculo de la pendiente de una recta tangente a una curva es necesario utilizar el concepto de pendiente de una recta secante.

Recuerda que una recta es secante a una curva si toca dos puntos de la misma, y una recta será tangente a la curva si toca un solo punto.

Si una curva tiene la ecuación $y = f(x)$ y queremos hallar la tangente a la curva, entonces consideraremos que una recta secante se convierte en tangente si hacemos que la distancia que separa a ambos puntos tiende a cero $(h \to 0)$.-



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

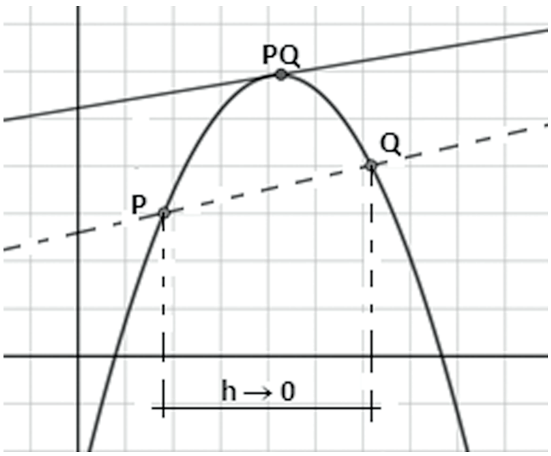
$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pendiente de una recta secante

A medida que la distancia que separa a los puntos P y Q se hace más pequeña, tanto que equivale a cero, en ese momento el punto PQ se convierte en un punto de tangencia, y la recta será una recta tangente que tendrá una pendiente m.

Calcular la pendiente m de la recta tangente será uno de los primeros problemas a resolver por el Cálculo y esto se hará aplicando el concepto de límite, el cual veremos en las siguientes progresiones.



$$m\tan = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

$$m\tan = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pendiente de una recta tangente a la curva

Esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ, cuando Q tiende hacia P.

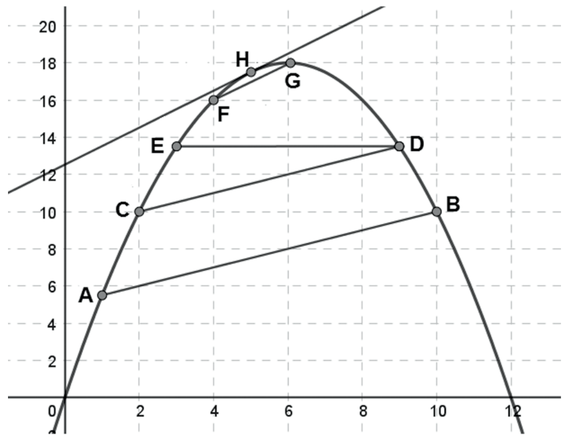
Veremos más adelante, en la progresión 7, la manera de utilizar este concepto de límite.

1 **ACTIVIDAD**

“Sobre el trazo de una parábola se ubicaron varios puntos y se unieron con rectas, como puede observarse en la imagen, y en la tabla se indican las coordenadas correspondientes”.

Determina la pendiente de cada una de las rectas trazadas y contesta las preguntas.

Punto	X	Y
A	1	5.5
B	10	10
C	2	10
D	9	13.5
E	3	13.5
F	4	16
G	6	18
H	5	17.5



a) ¿Qué nombre recibe la recta AB en relación a la parábola?

b) ¿Cuál es la pendiente de la recta AB?

c) ¿Cuál es la pendiente de la recta CD?

d) ¿Por la relación de sus pendientes, como son las rectas AB y CD?

e) ¿Cuál es la pendiente de la recta ED?

f) Si un recta pasara por el punto G y tuviera la misma pendiente que la recta ED, que nombre recibiría esa recta en relación a la parábola?

g) ¿Cuál es la distancia Δx de la recta FG?

h) ¿Cuál es la pendiente de la recta FG?

i) ¿Qué nombre recibe la recta que pasa por el punto H en relación a la parábola?

j) ¿Puedes determinar su pendiente? Explica tu respuesta.

Segundo problema: cálculo de la velocidad instantánea

El segundo problema tiene que ver con el movimiento. Muestra de ello es que en los siglos XVI y XVII se estudiaron, por cuestiones militares y de defensa, las trayectorias curvas que seguían las balas de cañón a través del aire en las zonas de combate; Galileo se da a la tarea de describir la aceleración de los objetos por efecto de la gravedad, Kepler estudia las órbitas elípticas que siguen los planetas, y Newton formula sus leyes del movimiento y de gravitación universal, resultando importante en todos estos casos estudiar la velocidad del cuerpo móvil, y de manera particular su velocidad instantánea.

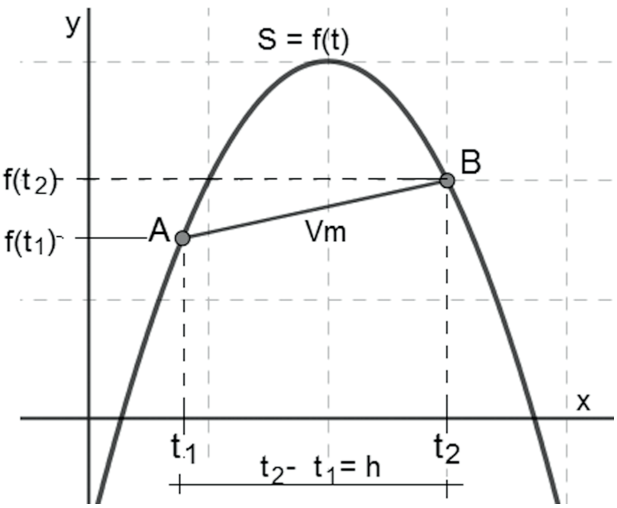
Velocidad Instantánea

Si un objeto se mueve a lo largo de una línea curva de acuerdo con una ecuación de movimiento $S = f(t)$, donde S es el desplazamiento del objeto, en el instante "t", su velocidad media será su desplazamiento promedio en un intervalo de tiempo.

$$Vmedia = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1},$$

O bien, como t_2 es el resultado de incrementar a t_1 una distancia h, entonces:

$$Vmedia = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

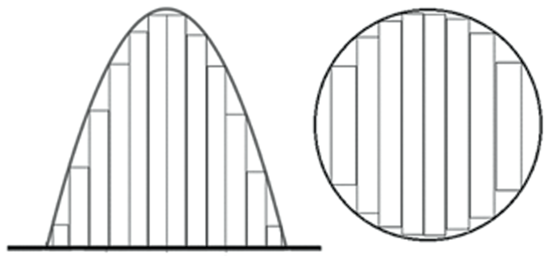


La velocidad instantánea es el límite del valor de las velocidades promedio sobre periodos cada vez más cortos de tiempo $(t \to 0)$, es decir, la diferencia de tiempos h se convierte en cero $(h \to 0)$.

$Vinst. = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ Este concepto de velocidad instantánea aplicando límites lo veremos más adelante en la progresión 9.

Tercer problema: cálculo de área bajo una curva.

Arquímedes adoptó una estrategia que le permitió calcular el área de una parábola, imaginándola como una serie de rectángulos infinitamente delgados y luego demostró que este resultado era bastante aproximado. A través de este método de agotamiento, Arquímedes fue capaz de calcular áreas y volúmenes de figuras y sólidos con lados curvos.



El uso de rectángulos y triángulos cada vez más pequeños permitía una aproximación cada vez más cercana, pero era necesario seguir abordando el problema para que el área sea exacta.

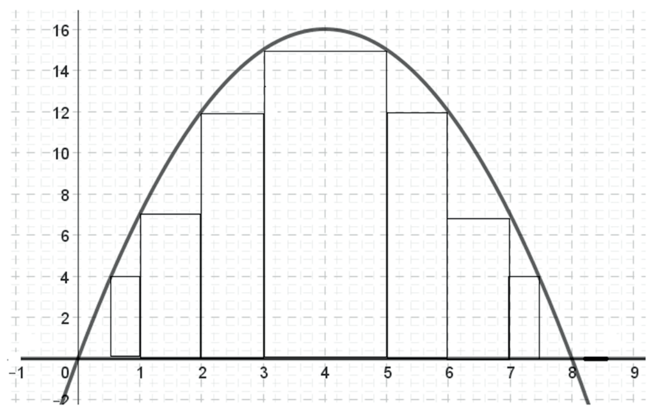
Isaac Newton, en el siglo XVII, se da también a la tarea de "cuadrar la curva", utilizando rectángulos infinitamente pequeños para determinar el área bajo la curva. Como la anchura de cada rectángulo se aproxima a cero, su suma se aproxima cada vez más al área real bajo la curva. Mismo principio que utilizará Georg Friedrich Bernhard Riemann.

2 ACTIVIDAD

Una curva se encuentra definida por la función $f(x) = -x^2 + 8x$

Se colocarán rectángulos bajo la curva con el tamaño de la base indicada.

- Determina la altura para cada rectángulo evaluando la función.
- Calcula el área correspondiente para cada rectángulo.
- Calcula el área aproximada bajo la curva como una suma de áreas de los rectángulos.



Rectángulo	Longitud de la base	Altura $f(x)$	Área
A	0.5	$f(0.5) = -(0.5)^2 + 8(0.5) = 3.75$	$A = (0.5)(3.75) = 1.875$

PROGRESIÓN 3

Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas.

CATEGORÍAS	METAS DE APRENDIZAJE
C3. Solución de problemas y modelación.	**M8.** Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar el fenómeno estudiado en la solución de un problema.
SUBCATEGORÍAS	
SC3.1. Uso de modelos.	

Contenidos específicos de la progresión

3.1. Clasificación de funciones.
3.2. Problemas de función lineal y cuadrática.
3.3. Evaluación de funciones polinomiales.
3.4. Operaciones con funciones.
3.5. Composición de funciones.

Descripción de la progresión:

A través de esta progresión se desarrollan conceptos que llevan a la definición de una función, empezando desde la relación de variables y continuando con el significado de función, para posteriormente conocer la clasificación de funciones, que les permitirá a las y los estudiantes desarrollar conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas.

¿Qué es una función?

En muchos de los fenómenos que suceden a nuestro alrededor se puede observar que cierta cantidad aumenta o disminuye dependiendo de otra, es decir, una variable se relaciona con los valores de otra variable. Por ejemplo:

- El costo a pagar por algunas frutas va en relación del peso que llevemos.
- El área de un círculo va en relación a su radio.
- La estatura de los niños va en relación con la edad.
- El costo de la paquetería va en función del peso del paquete.

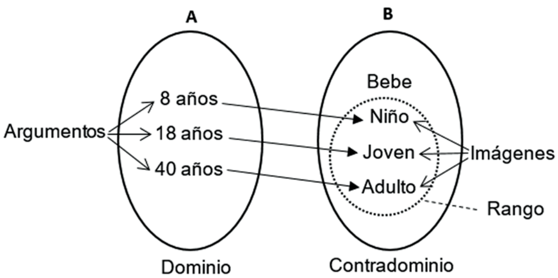
Fig. 1

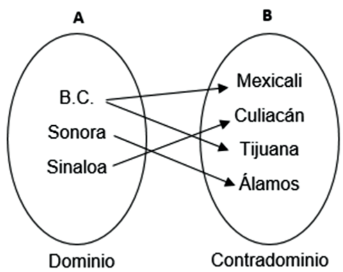
Por ejemplo, una empresa fabricante de patinetas solicita un agente de ventas ofreciendo un pago mensual de 7000 pesos y un pago por comisión de ventas de 150 pesos por producto vendido. Por lo tanto, el sueldo va a aumentar en función de los productos vendidos. Podemos expresar esta situación como:

$$Sueldo = \$150(productos) + \$7000$$
$$y = 150x + 7000$$

1. ¿Cuáles son las dos variables que se relacionan?________________________________
2. ¿Cuál de ellas es la variable dependiente de la otra?______________________________
3. ¿Cuál de ellas es la variable independiente? _____________________________________
4. ¿Cuánto ganará el agente si vende 30 patinetas en el mes? _________________________
5. ¿Cuánto ganará si vende 45 patinetas en el mes? _________________________________
6. Menciona tres ejemplos más de dos variables que se relacionan: _____________________
____

En matemáticas, una relación es la correspondencia de un primer conjunto, llamado Dominio, con un segundo conjunto, llamado Recorrido o Rango, de manera que a cada elemento del Dominio le corresponde uno o más elementos del Recorrido o Rango (Castilla, 2013).





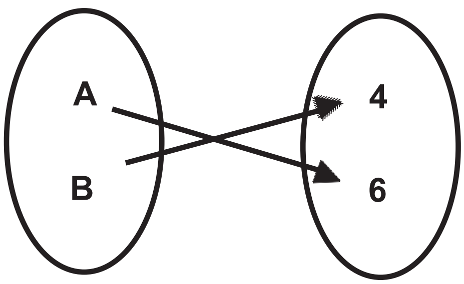
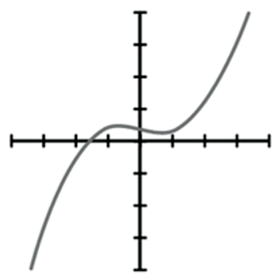
Pero una relación será una **función** si sólo si a un elemento del dominio le corresponde uno y sólo un elemento del Contradominio.

Representación

Las relaciones entre variables se pueden representar en diferentes formas como: un diagrama, una tabla, una oración verbal, una ecuación, por parejas ordenadas o una gráfica.

1 ACTIVIDAD

Anota el nombre del tipo de representación de cada una de las relaciones entre variables indicadas.

<table>
<tr><td>Nombre:</td><td>Nombre:</td></tr>
<tr><td>$\{(5,25),(6,30),(7,35),(8,40)\}$</td><td>Los números del 5 al 10 se le relacionan con su cuadrado.</td></tr>
<tr><td>Nombre:</td><td>Nombre:</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Nombre:</td><td>Nombre:</td></tr>
<tr><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>10</td><td>50</td></tr><tr><td>12</td><td>60</td></tr><tr><td>14</td><td>70</td></tr></table></td><td>$f(x)=x^2+2x-8$</td></tr>
</table>

Definición de función

Una función es una relación donde la regla de correspondencia entre dos conjuntos establece que a cada elemento del primer conjunto **x** denominado Dominio se le relaciona con **uno y sólo** un elemento del segundo conjunto **y= f(x)** denominado Rango o Contradominio.

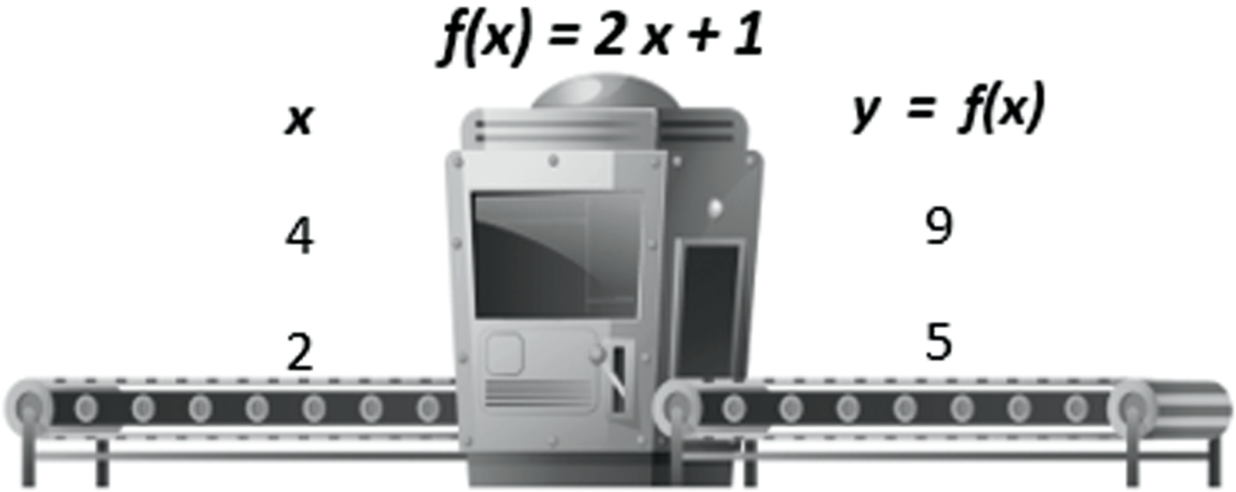


Fig. 2

Notación de funciones

Las funciones se representan mediante letras mayúsculas o minúsculas del alfabeto, las más comunes son $f(x)$, $g(x)$ o $h(x)$, se lee “f de x” o “g de x” o “h de x”; sin embargo cualquier letra puede ser usada y dependerá del problema del que se habla.

Una función se denota o escribe como $y = f(x)$ donde:

- x: variable independiente
- y: variable dependiente
- f: función, regla de asignación o correspondencia.

Clasificación de funciones

Las funciones se clasifican por el tipo de operaciones que admiten y por la forma de su gráfica.

Por el tipo de operaciones se dividen en algebraicas y trascendentes.

- Funciones algebraicas
  - Polinomiales
    - Función constante — $f(x) = a$
    - Función lineal — $f(x) = mx + b$
    - Función cubica — $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
    - Función cuartica — $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
  - Radicales — $f(x) = \sqrt{x}$
  - Racionales — $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

- Funciones Trascendentes
  - Trigonométricas
    - Función Seno — $f(x) = sen\, x$
    - Función Coseno — $f(x) = \cos x$
    - Función Tangente — $f(x) = \tan x$
  - Exponencial — $f(x) = 2^x$
  - Logarítmicas — $f(x) = \log x$

En la siguiente progresión se analizarán las gráficas de cada una de las funciones.

2 ACTIVIDAD **Clasificación de funciones.**

Identifica cuál es la clasificación de las siguientes funciones

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ________________	e) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ ______________
b) $f(x) = 4$ ________________________	f) $f(x) = \dfrac{x+5}{x+4}$ __________________
c) $f(x) = x^3 - 3$ ____________________	g) $f(x) = \sqrt{x+1}$ ____________________
d) $f(x) = -5x + 7$ ___________________	

Evaluación de funciones

Si se tiene una función definida por una fórmula y se quiere conocer el valor de la función en un valor x de su dominio, entonces se tiene que evaluar la fórmula que define la función en el número dado.

Ejemplo 1	Ejemplo 2
$f(x) = 3x^2 - 4x - 10$ Evaluar en $f(2)$ Sustituye $f(2) = 3(2)^2 - 4(2) - 10$ $f(2) = 3(4) - 8 - 10$ $f(2) = 12 - 8 - 10$ $f(2) = \boxed{-6}$	$f(x) = \dfrac{x^2 - 10}{x - 2}$ Evaluar en $f(-4)$ $f(-4) = \dfrac{(-4)^2 - 10}{(-4) - 2}$ Sustituye $f(-4) = \dfrac{16 - 10}{-4 - 2}$ $f(-4) = \boxed{-1}$

3 ACTIVIDAD Evaluación de funciones.

Evalúa las siguientes funciones con los valores definidos de x.

a)	$f(x)=5x-8$ $f(6)=$ $f(-4)=$	**b)**	$f(x)=-9x+10$ $f(3)=$ $f(-2)=$
c)	$f(x)=3x^2-7x+5$ $f(2)=$ $f(-1)=$	**d)**	$f(x)=x^3-4$ $f(3)=$ $f(-5)=$
e)	$f(x)=x^4$ $f(-2)=$ $f(4)=$	**f)**	$f(x)=\|x-9\|$ $f(-7)=$ $f(15)=$

g)	$f(x)=\sqrt{x-2}$ $f(6)=$ $f(18)=$	**h)**	$f(x)=\dfrac{x-12}{x+6}$ $f(3)=$ $f(-8)=$
i)	$f(x)=-\lvert x-3\rvert+5$ $f(5)=$ $f(0)=$	**j)**	$f(x)=(x+2)^2-16$ $f(0)=$ $f(8)=$

Operaciones entre funciones

Al estar observando un partido de vóleibol podemos darnos cuenta que la distancia que recorre la pelota al ser lanzada depende de la fuerza aplicada, pero algunas veces esa distancia se ve aumentada o disminuida por otra fuerza que en este caso resulta ser la del aire. Si pensamos en cada una de las fuerzas como una función, entenderemos cómo la función original se verá aumentada o disminuida por la segunda función.

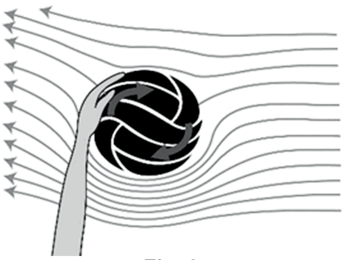


Fig. 3

Si se tienen varias funciones, entre éstas se pueden realizar algunas operaciones como suma, resta, multiplicación, división y composición de lo que resulta otra función.

Se tienen las funciones f y g las operaciones entre ellas se representan como:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

Es importante señalar que el dominio de las nuevas funciones es el dominio común de las funciones iniciales, esto es, su intersección.

Observa con atención los siguientes ejemplos en los que se realizan operaciones con funciones.

Ejemplo 1	Ejemplo 2
Considera $f(x)=3x-5$ y $g(x)=2x-4$ $(f+g)(x)=(3x-5)+(2x-4)$ $=3x-5+2x-4$ $=\boxed{5x-9}$ $(f-g)(x)=(3x-5)-(2x-4)$ $=3x-5-2x+4$ $=\boxed{x-1}$ $(f\cdot g)(x)=(3x-5)(2x-4)$ $=6x^2-12x-10x+20$ $=\boxed{6x^2-22x+20}$ $(\frac{f}{g})(x)=\frac{(3x-5)}{(2x-4)}$	Considera $f(x)=x^2-6x+8$ y $g(x)=x-4$ $(f+g)(x)=(x^2-6x+8)+(x-4)$ $=x^2-6x+8+x-4$ $=\boxed{x^2-5x+4}$ $(f-g)(x)=(x^2-6x+8)-(x-4)$ $=x^2-6x+8-x+4$ $=\boxed{x^2-7x+12}$ $(f\cdot g)(x)=(x^2-6x+8)(x-4)$ $=x^3-4x^2-6x^2+24x+8x-32$ $=\boxed{x^3-10x^2+32x-32}$ $(\frac{f}{g})(x)=\frac{x^2-6x+8}{x-4}=\frac{(x-4)(x-2)}{x-4}$ $=x-2$

4 ACTIVIDAD Operación con funciones.

Resuelve las operaciones entre las funciones f y g así como los problemas indicados.

Determina para a, b, c y d, las operaciones: $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

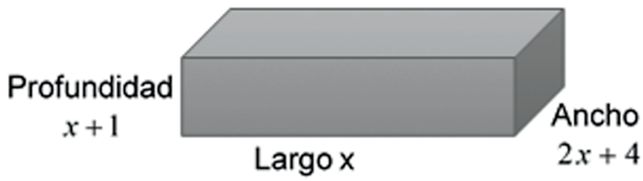
a)	**Sea** $f(x)=5x-2$ **y** $g(x)=3x+6$	**c)**	**Sea** $f(x)=x^2+8x+16$ **y** $g(x)=x+4$
b)	**Sea** $f(x)=x^2-4$ **y** $g(x)=x+2$	**d)**	**Sea** $f(x)=x^3+8$ **y** $g(x)=x+2$

e) Los ingresos de una empresa están representados por $f(x) = 250x + 60$ y los gastos por $g(x) = 100x + 20$. Determina la expresión que representa las ganancias.

f) Los pilotos de aviones, deben tomar en cuenta la velocidad y dirección del aire al momento de despegar. Si un avión que despega con una fuerza de $g(x) = 50x - 5$, tiene a su favor el viento con . ¿Con qué fuerza total va impulsado el avión?

g) En un día de vientos de Santa Ana se juega la final de futbol de la escuela, Rogelio hace un disparo a la portería contraria con una fuerza de $f(x) = 4x + 2$; pero en ese preciso momento una ráfaga de viento sopla en dirección contraria hacia dónde va dirigida la pelota con fuerza igual a $v(x) = 2x + 2$. ¿Con qué fuerza avanza en realidad la pelota?

Una alberca con forma de prisma rectangular tiene las siguientes dimensiones:



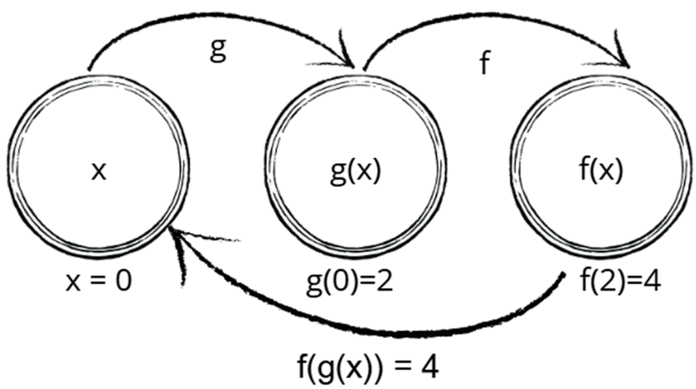
h) Determina el perímetro del fondo de la alberca.

i) Determina el área del fondo de la alberca.

j) Determina el volumen de la alberca.

Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g, la **función compuesta**, denotada por f o g (léase "f compuesta con g") se define como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Donde el dominio de f o g es el conjunto de números x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f. (Sullivan, 1997).



Ejemplo 1	Ejemplo 2
Sea $f(x)=3x-8$ y $g(x)=4x+7$ Determina: $f(g(x))=3(4x+7)-8$ $=12x+21-8$ $=\boxed{12x+13}$ $g(f(x))=4(3x-8)+7$ $=12x-32+7$ $=\boxed{12x-25}$	Sea $f(x)=x^2-25$ y $g(x)=x+4$ Determina: $f(g(x))=(x+4)^2-25$ $=x^2+8x+16-25$ $=\boxed{x^2+8x-9}$ $g(f(x))=(x^2-25)+4$ $=\boxed{x^2-21}$

5 ACTIVIDAD Composición de funciones.

Obtén las funciones compuestas de los siguientes incisos:

Responde...

a) Sea $f(x)=-5x+10$ y $g(x)=6x-12$ $(f\circ g)(x)=$ $(g\circ f)(x)=$	b) Sea $f(x)=x^2-16$ y $g(x)=x-5$ $(f\circ g)(x)=$ $(g\circ f)(x)=$
c) Sea $f(x)=\sqrt{x+2}$ y $g(x)=2x+8$ $(f\circ g)(x)=$	d) Sea $f(x)=3x-9$ y $g(x)=\frac{2}{x}$ $(f\circ g)(x)=$ $(g\circ f)(x)=$

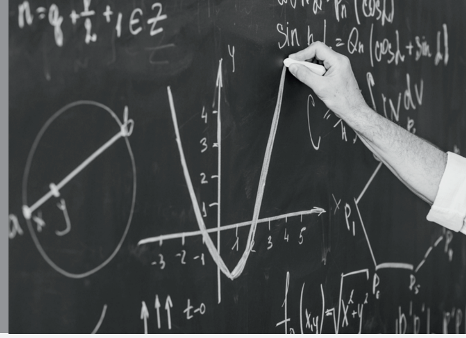
Resuelve las siguientes situaciones:

a) El costo de un teléfono celular con un descuento del 30% sobre el precio de lista, está definido por $C(x) = x - 0.30x$. El impuesto a pagar por un artículo que cuesta x pesos está dado por $I(x) = 0.15x$

b) Determina e interpreta $I(C(x))$.

c) ¿Cuánto pagarás por un teléfono celular cuyo precio de lista es de $8,200?

PROGRESIÓN 4



Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático.

CATEGORÍAS	METAS DE APRENDIZAJE
C3. Solución de problemas y modelación.	**M8.** Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.
SUBCATEGORÍAS	
SC3.2. Construcción de modelos. **SC3.3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.	

Contenidos específicos de la progresión

4.1. Gráficas de las funciones polinomiales.
4.2. Continuidad de una función.
4.3. Crecimiento y decrecimiento de una función.
4.4. Máximos, mínimos relativos y concavidad de una función.

Descripción de la progresión:

En la presente progresión se desarrollan las gráficas de las funciones algebraicas y se definen sus características, para posteriormente identificar cuando la una función es creciente o decreciente, su mínimo o máximo y si es continua o discontinua para su definición.

Gráficas de las funciones

Como analizamos en la progresión anterior, la clasificación de funciones se divide en dos principales grupos, las funciones algebraicas y trascendentes. En esta progresión analizaremos la representación gráfica de las funciones algebraicas que nos permite saber su comportamiento de acuerdo a sus características. Por medio de la tabulación podemos conocer los valores del rango $f(x)$ definiendo los valores del Dominio x .

1 ACTIVIDAD

Gráficas de las funciones.

Determina la gráfica de las siguientes funciones por medio de la tabulación, utiliza colores distintos para cada una y define sus características identificadas.

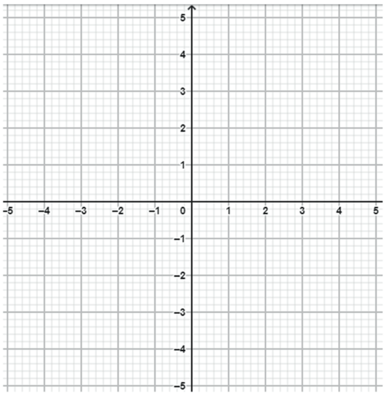
a) Función constante.

$y = 3$

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

$y = -2$

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	



Características:

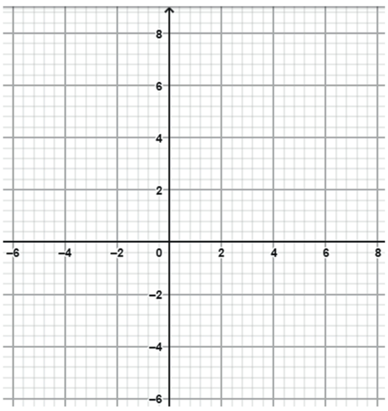
b) Función lineal.

$f(x) = 2x - 1$

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

$f(x) = -3x + 2$

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	



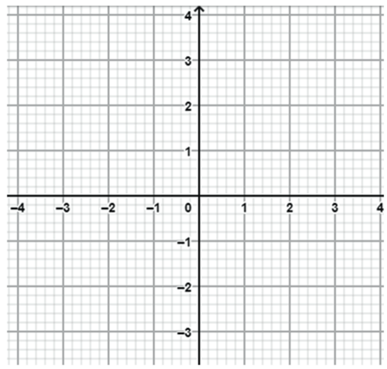
Características:

c) Función cuadrática.

$f(x)=x^2-2$ $\qquad$ $f(x)=-x^2+2$

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	



Características:

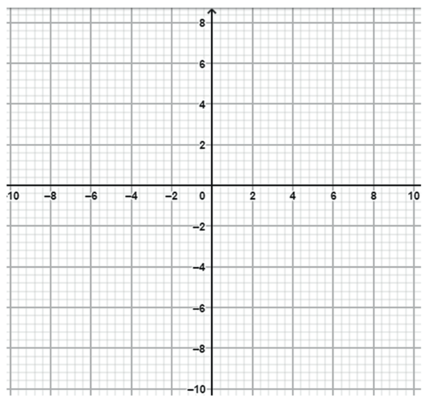
---

d) Función cúbica.

$f(x)=x^3$ $\qquad$ $f(x)=x^3-2$

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	



Características:

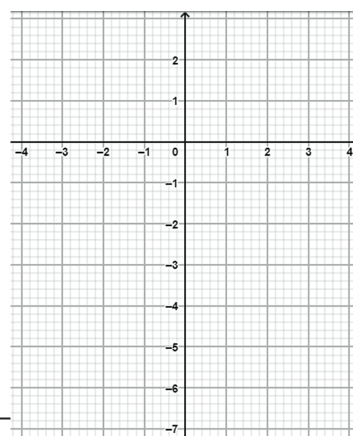
---

e) Función cuártica.

$f(x)=x^4-4x^2+2$ $\qquad$ $f(x)=-x^4+2x^2$

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	



Características:

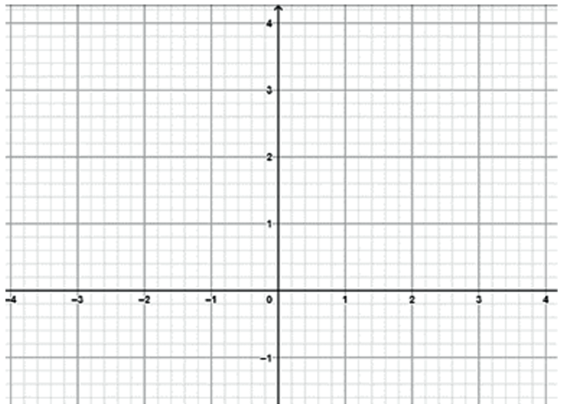
f) Función raíz.

$f(x)=\sqrt{x}$

x	y
-4	
-1	
0	
1	
4	

$f(x)=\sqrt{x}+2$

x	y
-4	
-1	
0	
1	
4	



Características:

Función creciente, decreciente o constante

Una función f es creciente en un intervalo I si, para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, con x_1 < x_2 , tenemos $f(x_1)<f(x_2)$.

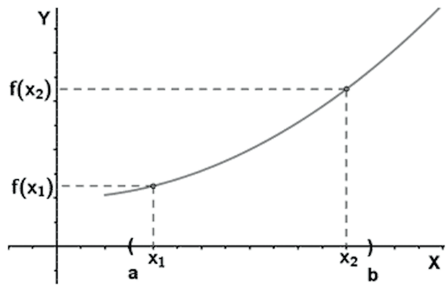


Fig. 1. Creciente

Una función f es decreciente en un intervalo I si, para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, con x_1 < x_2, tenemos $f(x_1)<f(x_2)$.

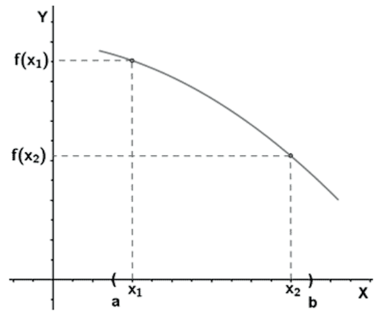


Fig. 2. Decreciente

Una función f es constante en un intervalo I si, para toda elección de x en I, los valores de $f(x)$ son iguales. (Sullivan, 1997)

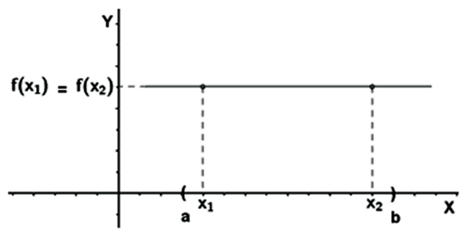
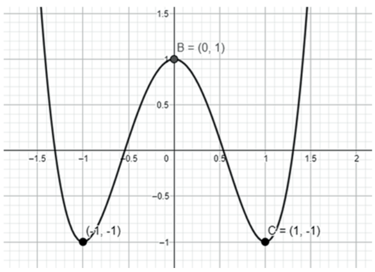
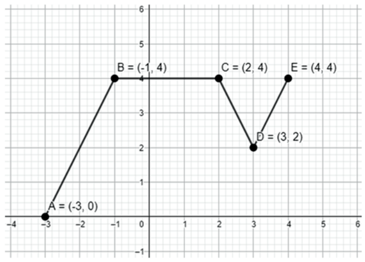


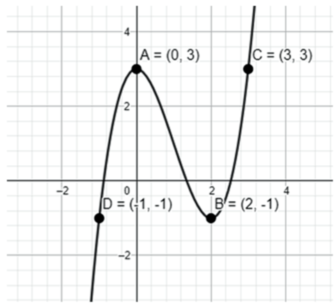
Fig. 3. Constante

2 ACTIVIDAD Función creciente o decreciente

Identifica en qué intervalo del Dominio es creciente, decreciente o constante la gráfica presentada.







Creciente: Decreciente: Constante:	Creciente: Decreciente: Constante:	Creciente: Decreciente: Constante:

Valor máximo o mínimo en una gráfica

- Una función tiene su máximo absoluto en $x = a$ si la ordenada es mayor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función.
- Una función tiene su mínimo absoluto en $x = b$ si la ordenada es menor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función.
- Una función $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = c$, si $f(c)$ es mayor o igual que los puntos próximos a c.
- Una función $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = d$, si $f(d)$ es menor o igual que los puntos próximos a d. Marta (2024)

Te habrás dado cuenta que las partes donde se encuentra un máximo o un mínimo la curva tiene una especie de concavidad. Al punto donde la curva cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba se le llama ***Punto de Inflexión.***

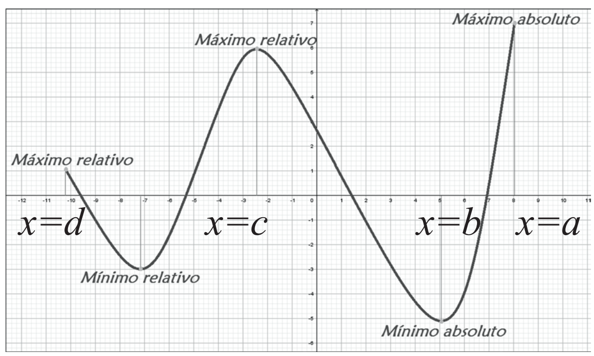


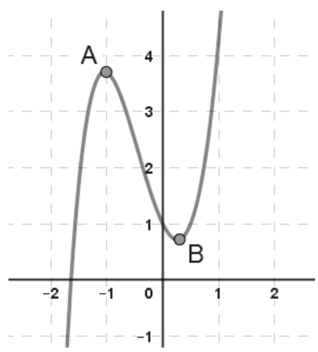
Fig. 4. Máximos y mínimos

3

ACTIVIDAD

Valor máximo y mínimo

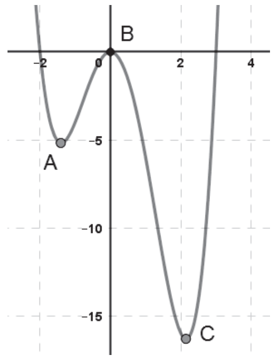
Identifica los puntos en las gráficas que corresponden a máximos absolutos, máximos relativos, mínimos absolutos y mínimos relativos.



A) $f(x)=0.3x^5+2x^3+3x^2-3x+2$

Punto A ____________________

Punto B ____________________

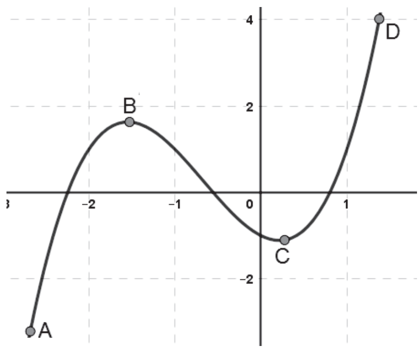


B) $f(x)=x^4-x^3-6x^2$

Punto A ____________________

Punto B ____________________

Punto C ____________________



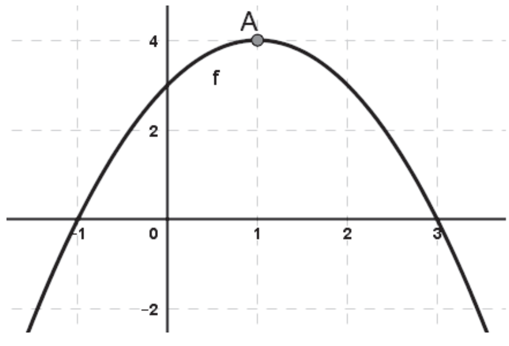
C) $f(x)=x^3+2x^2-x-1$

Punto A ____________________

Punto B ____________________

Punto C ____________________

Punto D ____________________



D) $f(x)=3+2x-x^2$

Punto A ____________________

¿En algún punto de la gráfica tendrá un máximo y además un mínimo esta función?
Explica tu respuesta:

Funciones continuas o discontinuas

Si la gráfica de la función tiene algún corte o salto, entonces se considera discontinua. Una forma de saber si es una función continua, es que su dominio sea el conjunto de números reales. (Ibáñez & García, 2011).

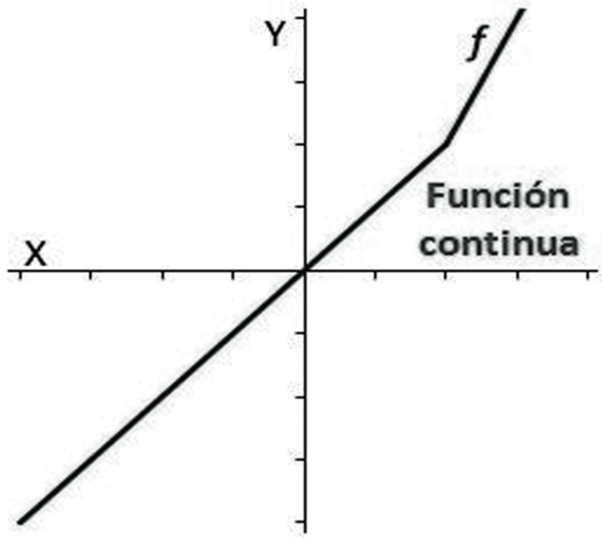


Fig. 3. Función continua

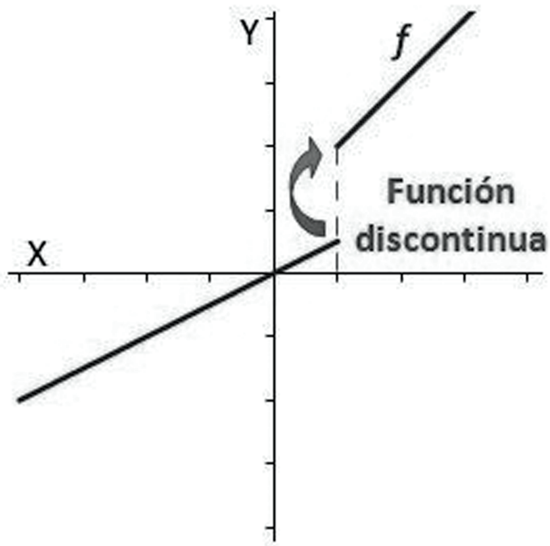


Fig. 4. Función discontinua

4 ACTIVIDAD Integradora

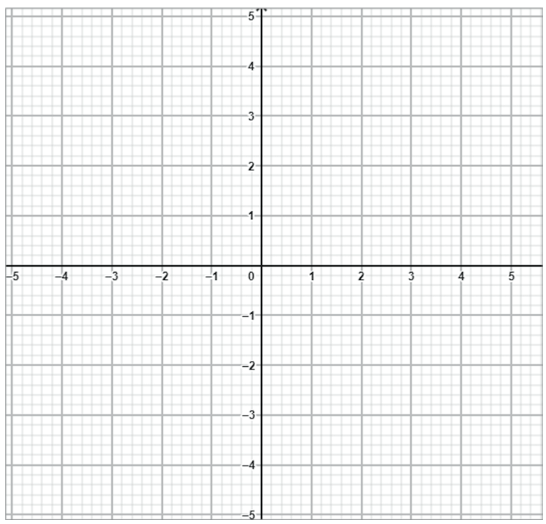
Una empresa desea conocer la función que representa el volumen de la caja de almacenamiento de productos, para de esa forma conocer su representación gráfica y su ecuación.

Su base es cuadrada de lado (x – 3) y su altura es x.

a) Determina la ecuación que representa el volumen.

b) Tabula la función encontrada y grafícala.

x	F(x)
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

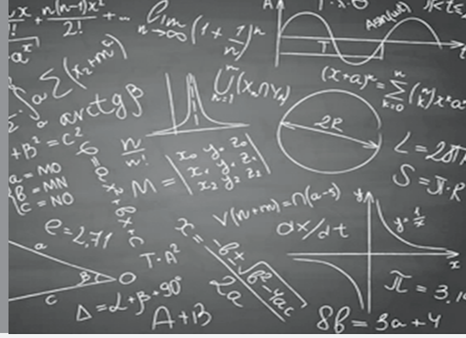


c) Determina su Máximo y mínimo.

d) Determina el intervalo del dominio en el que la función es creciente y decreciente.

e) ¿La función es continua o discontinua?

PROGRESIÓN 5



Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función.

CATEGORÍAS

C1. Procedural
C2. Procesos de intuición y razonamiento.
C4. Interacción y lenguaje matemático.

SUBCATEGORÍAS

SC1.3. Elementos variacionales.
SC2.1. Capacidad para observar y conjeturar.
SC2.2. Pensamiento intuitivo
SC4.1. Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico.

METAS DE APRENDIZAJE

M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.

M5. Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.

M12. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.

Contenidos específicos de la progresión

5.1. Concepto intuitivo de límite.
5.2. Teoremas de límites.
5.3. Límites indeterminados de la forma 0/0.
5.4 Límites indeterminados de la forma infinito/infinito.

Descripción de la progresión:

En esta progresión se analizará el concepto intuitivo de límite, los teoremas que lo definen, para posteriormente aplicarlo. Dado que existen límites indeterminados en su forma 0/0, las y los estudiantes pondrán en práctica los diferentes tipos de factorización para determinarlos. El tema de límite cobra mucha importancia por ser clave para la definición de la derivada y sus aplicaciones.

Límite

Consideremos que una persona tiene que recorrer 1 km para llegar a un acantilado del lado izquierdo, cada hora recorre la mitad de la distancia, es decir, la primera hora recorre 500m, la segunda hora recorre 250m de la distancia restante, la tercera 125m de la distancia restante, así sucesivamente de manera indefinida seguirá recorriendo la mitad de la distancia restante y acercándose más y más al acantilado sin llegar a tocarlo o caer en él.

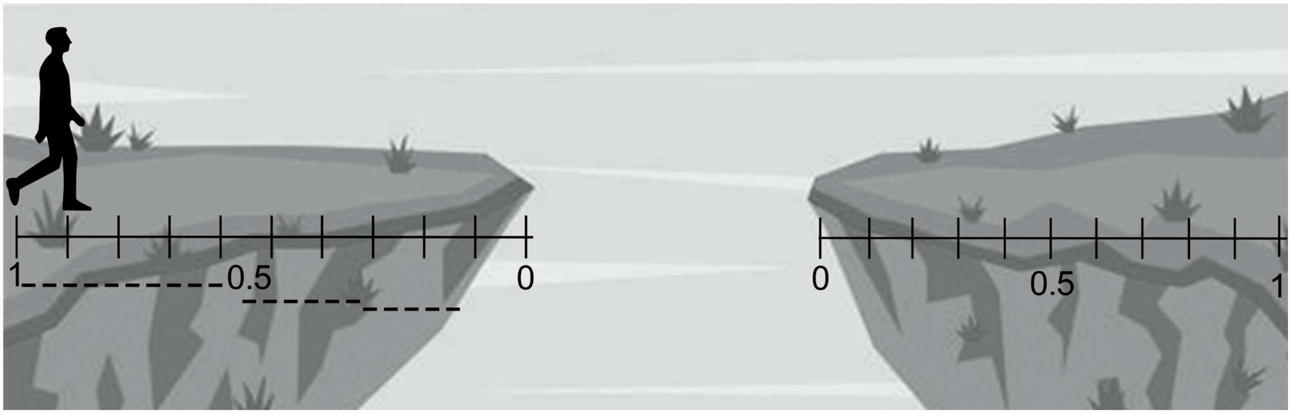


Fig. 1. Acantilado

Si observas, la persona se puede acercar mucho por la izquierda o por la derecha del acantilado sin llegar a tocarlo. Esa es la idea de límite.

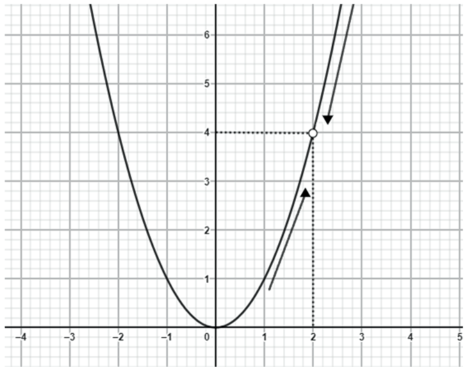
La definición de límite de una función es un tema fundamental en todos los campos del cálculo; de hecho, la derivada, es por definición, un límite.

Cauchy (1789-1857) define el límite de la siguiente forma: Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una variable dada se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acaban de diferir de él, tan poco como se quiera, este último se llama límite de todos los otros.

Veamos un ejemplo con la función $f(x)=x^2$ que está definida por la siguiente gráfica. Si queremos conocer cómo se comporta la función a medida que x se acerca a 2, podemos describirlo como $x \to 2$, para eso podemos representar en una tabla y ver sus valores $f(x)$ acercándose por la izquierda y por la derecha de 2.

Calcula los valores de $f(x)$ cuando $x \to 2$

Por la izquierda	
x	$f(x)$
1	
1.5	
1.8	
1.9	
1.99	
1.999	
$x \to 2^-$	$f(x) \to$



Por la derecha	
x	$f(x)$
3	
2.5	
2.2	
2.1	
2.01	
2.001	
$x \to 2^+$	$f(x) \to$

La noción de límite está asociada con el comportamiento de una función cerca de c, sin llegar a ser c, de manera que decir que $\lim_{x \to C} f(x) = L$, significa que cuando x está cerca, pero diferente de c, $f(x)$ está cerca de L.

Otra manera de entender el concepto de límite es considerar que $f(x) = L$ conforme $x \to c$, es decir, el límite de $f(x)$, cuando x tiende a c es igual a L.

$$\lim_{x \to C} f(x) = L$$

1 ACTIVIDAD

En cada uno de los siguientes incisos determina el límite por la izquierda y por la derecha de las funciones propuestas.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 5$

Por la izquierda	
x	$f(x)$
1	
1.5	
1.8	
1.9	
1.99	
1.999	
$x \to 2^-$	$f(x) \to$

Por la derecha	
x	$f(x)$
3	
2.5	
2.2	
2.1	
2.01	
2.001	
$x \to 2^+$	$f(x) \to$

Conclusión:

$\lim\limits_{x\to}($ $\qquad\qquad)$=______

b) $\lim\limits_{x\to 4} 2x - 3$

x	3.8	3.9	3.99	$\lim\limits_{x\to 4} 2x - 3$	4.001	4.1	4.2
$f(x)$							

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

Por la izquierda	
x	$f(x)$
2	
2.5	
2.8	
2.9	
2.99	
2.999	
$x \to \ ^-$	$f(x) \to$

Por la derecha	
x	$f(x)$
4	
3.5	
3.2	
3.1	
3.01	
3.001	
$x \to \ ^+$	$f(x) \to$

Conclusión:

$\lim\limits_{x\to}($ $\qquad\qquad)$=______

Propiedades de los límites

Teoremas de límites	Ejemplo
1. $\lim_{x\to a} C = C$	$\lim_{x\to 4} 5 = 5$
2. $\lim_{x\to a} x = a$	$\lim_{x\to 3} x = 3$
3. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$	$\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$
4. $\lim_{x\to a} k\cdot f(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to 5} 3x^3 = 3\lim_{x\to 5} x^3 = 3(5)^3 = 375$
5. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to 3} 4x^2 - 2x = \lim_{x\to 3} 4x^2 - \lim_{x\to 3} 2x$ $= 4(3)^2 - 2(3)$ $= 36 - 6$ $= 30$
6. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\bullet g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \bullet \lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to 5} 4x^2 = (\lim_{x\to 5} 4)(\lim_{x\to 5} x^2) = (4)(5^2) = 100$
7. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$	$\lim_{x\to -1}\dfrac{2x^3+3x^2-x}{5x-2} = \dfrac{\lim_{x\to -1} 2x^3 + \lim_{x\to -1} 3x^2 - \lim_{x\to -1} x}{\lim_{x\to -1} 5x - \lim_{x\to -1} 2}$ $= \dfrac{2(-1)^3+3(-1)^2-(-1)}{5(-1)-2}$ $= -\dfrac{2}{7}$
8. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$	$\lim_{x\to 2}[x]^4 = [\lim_{x\to 2} x]^4 = (2)^4 = 16$
9. $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ siempre que $\lim_{x\to a} f(x)$ >0 cuando n sea par.	$\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2+9} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(x^2+9)}$ $= \sqrt{\lim_{x\to 4} x^2 + \lim_{x\to 4} 9}$ $= \sqrt{4^2+9}$ $= \sqrt{25} = 5$

Aunque es necesario entender y aplicar leyes para los límites, por rapidez en el procedimiento simplificamos y damos por hecho su aplicación y sustituimos directamente los límites.

2 ACTIVIDAD

Determina el valor de los límites de las siguientes funciones

1) $\lim_{x\to 5} 10 =$

2) $\lim_{w\to 6} w =$

3) $\lim_{x\to -3} x^2 - 2x =$

4) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x+3} =$

5) $\lim_{x\to -3} (x+1)(x^3 - 3x + 6) =$

6) $\lim_{x\to 4} \frac{8x(x^2-1)}{x^2-3} =$

7) $\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{3} =$

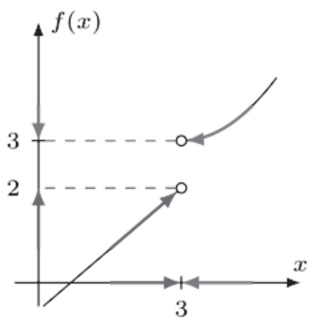
8) $\lim_{x\to -1} (2x^2 + 3x - 1)(x^2 + x - 2) =$

9) $\lim_{x\to 0} (x^3 + 6)^3 =$

10) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} =$

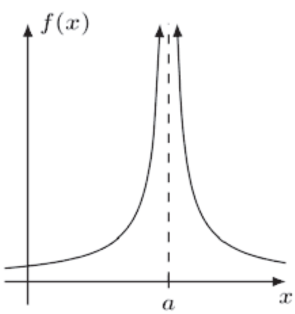
¿Cuándo no existen los límites?

1. Cuando $f(x)$ tiende a un número diferente desde la derecha al que tiende por la izquierda.



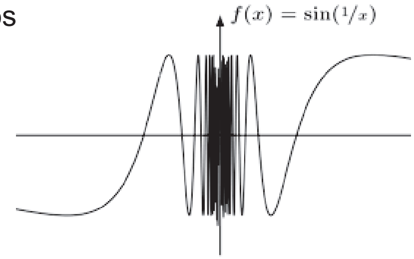
En la gráfica vemos que por izquierda $f(x)$ se acerca a 2, y por derecha se acerca a 3.

2. Cuando $f(x)$ crece o decrece sin cota cuando $x \to a$.



Para que exista un límite, la función debe aproximarse a un valor particular. En el caso que se muestra arriba, las flechas en la función indican que la función se vuelve infinitamente grande. Como la función no se aproxima a un valor particular, el límite no existe.

3. Cuando $f(x)$ oscila entre dos valores fijos cuando $x \to a$.



La función comienza a oscilar cada vez más rápido. Entonces podríamos concluir que cuanto $x \to 0$, más rápido oscila la función entre 1 y -1.

(Julián, 2019)

Forma indeterminada

Si los límites del numerador y del denominador son ambos iguales a cero, se tiene la forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ que se denomina indeterminada. La indeterminación se puede eliminar buscando una función equivalente mediante operaciones algebraicas sencillas como la factorización y simplificación.

Pudiéndose encontrar alguno de los siguientes tipos de factorización:

Factor común	$ax + bx = x(a+b)$ $10x^2 - 15x = 5x(2x-3)$
Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $49x^2 - 25 = (7x+5)(7x-5)$
Trinomio cuadrado perfecto	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ $4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2$
Trinomios de la forma x^2+bx+c	$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ $x^2 + 7x + 12 = (x+4)(x+3)$
Trinomios de la forma ax^2+bx+c	$3x^2 - 14x - 5 = (x-5)(3x+1)$

Nota: Cuando existe indeterminación $\left(\frac{0}{0}\right)$, se necesita utilizar las factorizaciones, puede ser necesario factorizar el numerador, el denominador o ambos.

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(2)^2 - 4}{(2) - 2} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminado}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x + 2$$

$$\lim_{x \to 2} x + 2 = (2) + 2 = 4$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+x-20}{x-4}=\frac{(4)^2+(4)-20}{4-4}=\frac{0}{0}\text{ Indeterminado}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+x-20}{x-4}=\frac{(x+5)(x-4)}{x-4}=x+5$$

$$\lim_{x\to 4}=x+5=(4)+5=9$$

3 ACTIVIDAD

Aplicando factorización determina los límites de cada función:

1.- $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$

2.- $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+11x+18}{x^2+6x+8}$

3.- $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}$

4.- $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$

5.- $\lim_{x\to -\frac{5}{2}}\frac{2x^2-x-15}{2x+5}$

6.- $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-36}{4x^2-16x-48}$

7.- $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2-1}$

8.- $\lim_{x\to -9}\frac{5x+45}{x^2+5x-36}$

9.- $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2-1}$

10.- $\lim_{x\to -\frac{2}{3}}\frac{3x-2}{3x^2-14x+8}$

11.- $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+6x+9}{2x^2+8x+6}$

12.- $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x^2}$

13.- $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x}{2x^2-2}$

14.- $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

15.- $\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

Límites cuando x tiende a cero $x \to 0$ y cuando x tiende al infinito $x \to \infty$

Existen ciertos límites que se presentan cuando la variable $x \to 0$ o $x \to \infty$, son los siguientes:

$$\lim_{x\to 0} k\cdot x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} k\cdot(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{k} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{k}{x} = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{k}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} k\cdot x = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to \infty} k\cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{k}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to \infty} \frac{k}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{k} = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to \infty} \frac{\infty}{k} = \infty$$

Límites al infinito $\frac{\infty}{\infty}$

Sí los límites del numerador y del denominador son ambas iguales a infinito, se tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. La indeterminación se puede eliminar dividiendo ambos términos entre la variable de mayor grado que interviene en la expresión.

Cuando $x \to \infty$ podemos aplicar el siguiente teorema $\lim_{x\to\infty} \frac{C}{x} = 0$, lo que nos permite calcular los siguientes ejercicios:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 2}{x^4 - 6x^2 - 1}$ para hallar el límite de la función, dividimos cada término del numerador y del denominador por la variable con la potencia mayor y aplicamos el teorema.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^4}{x^4} - \frac{3x^3}{x^4} + \frac{5x^2}{x^4} - \frac{x}{x^4} + \frac{2}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4} - \frac{6x^2}{x^4} - \frac{1}{x^4}} = \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}}{1 - \frac{6}{x^2} - \frac{1}{x^4}} = \frac{2-0+0-0+0}{1-0-0} = 2$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-2x^3-4x}{2x^4-6x^5}=\frac{\frac{3x^5}{x^5}-\frac{2x^3}{x^5}-\frac{4x}{x^5}}{\frac{2x^4}{x^5}-\frac{6x^5}{x^5}}=\frac{3-\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^4}}{\frac{2}{x}-6}=\frac{3-0-0}{0-6}=-\frac{1}{2}$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5+6x^4-2}{x^5-3}=\frac{\frac{4x^5}{x^5}+\frac{6x^4}{x^5}-\frac{2}{x^5}}{\frac{x^5}{x^5}-\frac{3}{x^5}}=\frac{4-\frac{6}{x}-\frac{2}{x^5}}{1-\frac{3}{x^5}}=\frac{4-0-0}{1-0}=4$$

4 ACTIVIDAD

Determina los límites de las siguientes expresiones.

1.- $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-3}{2x^2++9x}$	2.- $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^6-3x}{-6x^2-x^6}$
3.- $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2+5x-3}{5x^2-2x+7}$	4.- $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-5x^2+6}{7x-3x^2+9x^3}$
5.- $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4+2x^2+5x}{3x-3x^2-3x^4}$	6.- $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-6x^3+6x}{6x-x^2+2x^3}$

PROGRESIÓN 6

Identifica y contextualiza la continuidad de funciones utilizadas en la modelación de situaciones y fenómenos y hace un estudio, utilizando el concepto de límite, de las implicaciones de la continuidad de una función tanto dentro del desarrollo matemático mismo, como de sus aplicaciones en la modelación.

CATEGORÍAS	METAS DE APRENDIZAJE
C2. Proceso de razonamiento. **C4.** Interacción y lenguaje matemático.	**M4.** Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. **M13.** Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
SUBCATEGORÍAS	
SC2.1. Capacidad para observar y conjeturar. **SC2.2.** Pensamiento intuitivo. **SC4.1.** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico. **SC4.3.** Ambiente matemático de comunicación.	

Contenidos específicos de la progresión

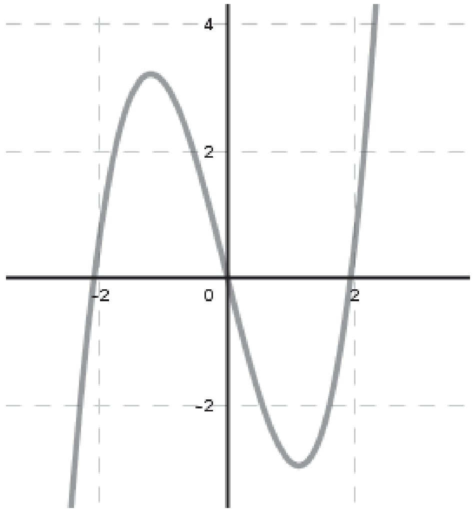
6.1. Gráfica de una función racional: con exponente lineal.
6.2. Asíntota vertical y horizontal de una función racional.
6.3. Límite de una función racional desde su interpretación gráfica.

Descripción de la progresión:

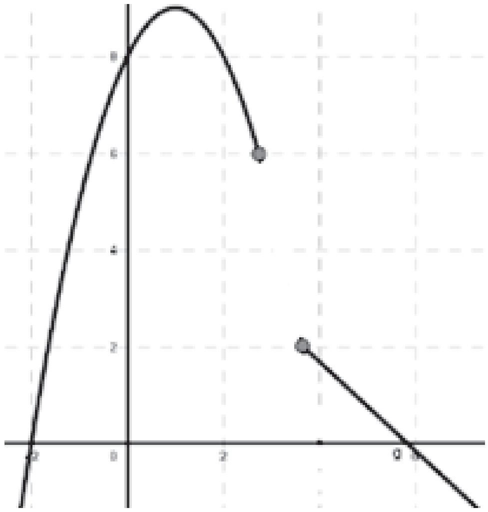
En esta progresión se presentan las características de las funciones continuas y discontinuas, haciendo énfasis en las funciones racionales, para a partir de ellas, reconocer las asíntotas, verticales y horizontales que las definen. Se hará finalmente la determinación de límites de funciones racionales cuando éstas son factorizables, o bien, la determinación del límite lateral cuando el límite en la función racional no existe.

Continuidad en una función

Las funciones polinomiales anteriormente vistas: lineales, cuadráticas, cúbicas, etc., son funciones continuas, es decir, aceptan cualquier valor real para x, de manera que el trazo de su gráfica nunca se interrumpe. Más no pasa lo mismo con todas las funciones, algunas de ellas tienen una interrupción en el trazo de su gráfica, tienen una ruptura en su trazo, se llaman funciones discontinuas.



Función continua



Función discontinua

En las funciones discontinuas se dice que se encuentra indefinida para un valor de x o para un conjunto de valores en x.

Una función $f(x)$ es continua en un punto a, si y sólo si, se verifican las condiciones siguientes:

- La función existe en a.
- Existe límite de $f(x)$ cuando x tiende a a.
- El valor de la función en el punto y el límite en dicho punto son iguales:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Cuando no se cumple alguna de las anteriores condiciones, se dice que la función es discontinua en el punto.

Por otra parte, se considera que la función es continua en un intervalo (a,b) cuando es continua en todo punto x, tal que $a < x < b$.

Funciones continuas

Para algunas familias de funciones es posible conocer su continuidad basándose en los siguientes criterios generales:

- Las funciones polinomiales son continuas en todo el conjunto de los números reales.
- Las funciones racionales obtenidas como cociente de dos polinomios son continuas en todos los puntos del conjunto R de números reales, salvo en aquellos en los que se anula el denominador.
- Las funciones potenciales, exponenciales y logarítmicas son continuas en todo su dominio de definición.
- Las funciones trigonométricas seno y coseno son continuas en todo el conjunto de los números reales (en cambio, la función tangente es discontinua en los valores múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$).
- Las funciones racionales, aquellas que tienen una variable en el denominador, son funciones **discontinuas**.

Función racional

Es toda función que se puede expresar como el cociente de dos polinomios.

$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $Q(x)\neq 0$, por ejemplo, $f(x)=\frac{4x+1}{x-3}$,

El dominio de este tipo de funciones es el conjunto de los números reales, excepto aquellos que anulan el denominador, que hacen que el denominador sea cero.

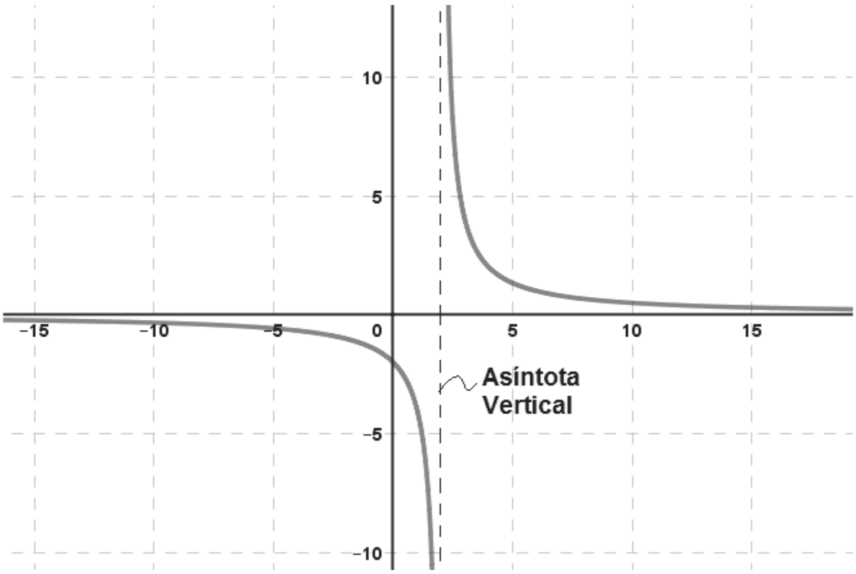
Por definición, el dominio de una función racional es el conjunto de números reales que x puede obtener, por lo que quedan excluidos aquellos que anulan el denominador.

Por ejemplo, el dominio de la función $f(x)=\frac{4x+1}{x-3}$ es el conjunto de los números reales excepto $x=3$. Puede tener cualquier valor para x, excepto el número 3.

El dominio se puede expresar como $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$.

Asíntotas: vertical y horizontal de una función racional

En una función racional, **la asíntota vertical** es una recta a la cual la función se va acercando indefinidamente sin llegar nunca a cortarla. Se sabe que el valor de x al no estar en el dominio de la función, provoca que la gráfica nunca puede cruzar esta asíntota.



La asíntota es la recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de la función; es decir, que la distancia entre las dos tiende a ser cero, a medida que se extienden indefinidamente.

Las asíntotas verticales se obtienen de las raíces del polinomio del denominador, igualando el dominador a cero y determinar el valor o los valores de x, ya que una función puede tener más de una asíntota vertical.

Ejemplos:

a) $f(x)=\dfrac{x+4}{x-3}$, la asíntota vertical es x = 3, porque al ser x − 3 = 0, entonces x = 3

b) $f(x)=\dfrac{3x}{5x-10}$, el denominador 5x − 10 se iguala a cero,

$$5x-10=0$$

$$x=\frac{10}{5}=2$$

La asíntota vertical es x = 2

c) $f(x)=\dfrac{4}{x^2-4x-5}$, el denominador se iguala a cero y se factoriza para determinar sus raíces o valores de x.

$$\begin{aligned} x^2-4x-5&=0\\ (x-5)(x+1)&=0\\ x-5&=0\\ x_1&=5\\ x+1&=0\\ x_2&=-1 \end{aligned}$$

Las asíntotas son x = 5, x = -1

En una función racional, las **asíntotas horizontales** dependen de la relación que existe entre los grados del polinomio del numerador y del polinomio del denominador.

Las asíntotas horizontales son rectas horizontales a las cuales la función se va acercando indefinidamente. Las asíntotas horizontales son rectas de ecuación: y = k.

Para obtener una asíntota horizontal, el numerador y el denominador se dividen por la máxima potencia que aparece en la expresión de la función, para posteriormente hacer que $x\to\infty$, considerando que cualquier número dividido entre infinito es cero.

Ejemplos: determinar la asíntota horizontal:

1) Para la función $f(x)=\dfrac{x+4}{x-3}$

$$f(x)=\frac{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{3}{x}}=\frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{3}{x}}=\frac{1+\frac{4}{\infty}}{1-\frac{3}{\infty}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

La asíntota horizontal es y = 1

2) Para la función $f(x)=\dfrac{3x}{5x-10}$

$$f(x)=\frac{\frac{3x}{x}}{\frac{5x}{x}-\frac{10}{x}}=\frac{3}{5-\frac{10}{x}}=\frac{3}{5-\frac{10}{\infty}}=\frac{3}{5-0}=\frac{3}{5}$$

La asíntota horizontal es y = 3/5

3) Para la función $f(x)=\dfrac{4}{x-1}$

$$f(x)=\frac{\frac{4}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{4}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=0$$ La asíntota horizontal es y = 0

1

ACTIVIDAD

Determinación de asíntotas

Determina las asíntotas horizontal y vertical para cada una de las siguientes funciones racionales.

A) $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$

B) $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$

C) $f(x)=\dfrac{3}{2x+1}$

D) $f(x)=\dfrac{2x-5}{4x+1}$

E) $f(x)=\dfrac{4x}{x-5}$

F) $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-25}$

Gráfica de una función racional

Pasos a considerar para realizar el trazo de una función racional.

1) Determina las asintotas, vertical y horizontal.
2) Traza las rectas de las asíntotas en la gráfica en caso de que las haya.
3) Sustituye valores x cercanos a la asintota vertical, a la derecha y a la izquierda.
4) Une, mediante curvas, los puntos obtenidos para trazar la gráfica de la función.

Realiza la gráfica de la siguiente función $f(x)=\frac{x+2}{2x-4}$, determinando sus asíntotas.

Asíntota vertical: $2x-4,=0$ $\quad x=\frac{4}{2}=2$ $\qquad$ x = 2

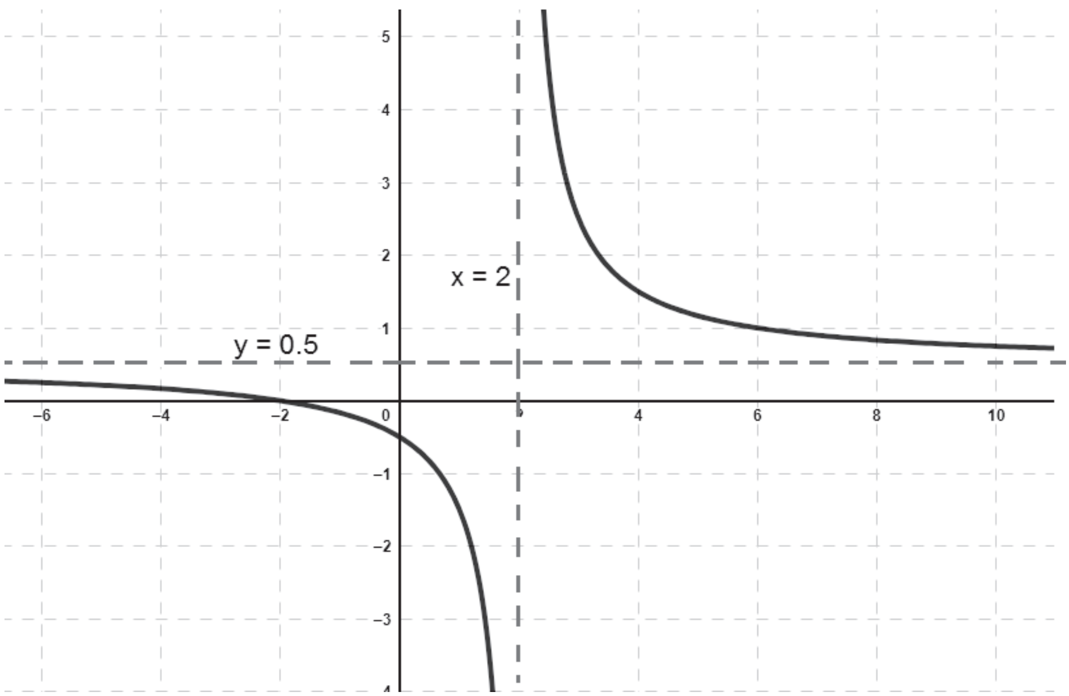
Asíntota horizontal: $f(x)=\frac{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{4}{x}}=\frac{1+\frac{2}{x}}{2-\frac{4}{x}}=\frac{1+\frac{2}{\infty}}{2-\frac{4}{\infty}}=\frac{1+0}{2-0}=0.5$ $\qquad$ y = 0.5

x	y
-1	-0.16
0	**-0.5**
1	**-1.5**
2	**-**
3	**2.5**
4	**1.5**

$$f(x)=\frac{x+2}{2x-4},=\frac{-1+2}{2(-1)-4}=-0.16$$

$$f(x)=\frac{x+2}{2x-4},=\frac{0+2}{2(0)-4}=-0.5$$

$$f(x)=\frac{x+2}{2x-4},=\frac{1+2}{2(1)-4}=-1.5$$



2 ACTIVIDAD

Gráfica de funciones racionales

A) Realiza la gráfica de la siguiente función $f(x)=\dfrac{2x}{x-4}$, determinando sus asíntotas.

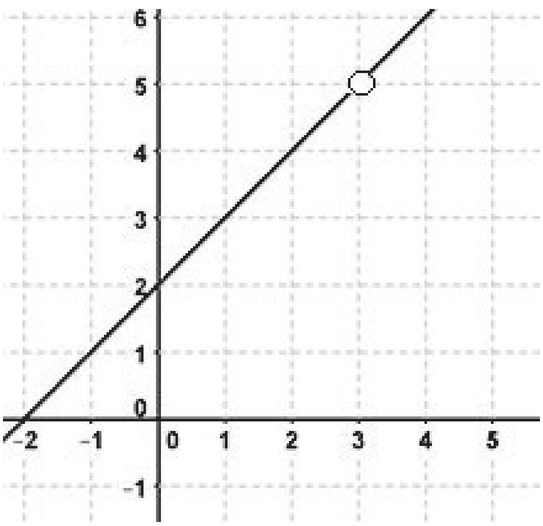
B) Realiza la gráfica de la siguiente función $f(x)=\dfrac{5}{3x+6}$, determinando sus asíntotas.

Límite de una función racional desde su interpretación gráfica.

Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ se trazará su gráfica y para ello se elabora la siguiente tabla:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	1	2	3	4	-	6	7	8	9

Se puede observar que existe una discontinuidad en la función cuando “x” tiende a 3.



$$f(3)=\frac{3^2-3-6}{3-3}$$

$$f(3)=\frac{0}{0}$$

Pero se puede hacer un acercamiento hacia x = 3, dándole valores muy cercanos a él, tanto por la izquierda como por la derecha, para determinar el valor del límite cuando “x” se acerca al 3.

x	2.7	2.8	2.9	2.99	3	3.01	3.1
y	4.70	4.80	4.90	4.99	-	5.01	5.1

Así, $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=5$, es decir, cuando “x” tiende a 3, $f(x)$ tiende a 5 y es su límite. Recuerda que el límite puede determinarse por factorización, siempre que sea posible.

A esto se le llama discontinuidades removibles.

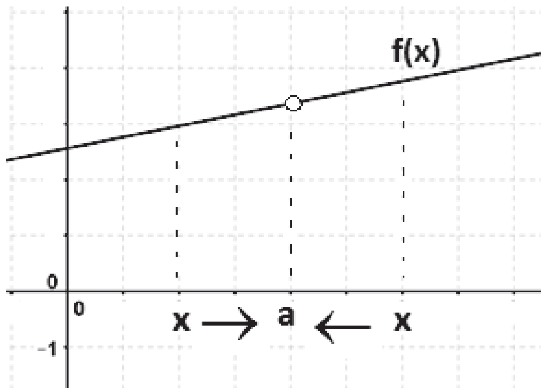
En esta función racional el límite sí existe, más no siempre será así.

Límites laterales

Para determinar el límite de una función, si es que existe, se pueden asignar valores muy cercanos al número “a” indicado, tanto por la derecha como por la izquierda, de manera que:

- $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$, significa que pueden asignarse valores x lo bastante cerca de “a”, pero menores que “a”. Así, decimos que el *límite izquierdo* de $f(x)$ cuando “x” tiende a “a” es igual a su límite L.

- $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$, significa que el límite de $f(x)$ cuando “x” se acerca a “a” desde la derecha es L.



Ejemplos:

Determinar el límite asignando valores por la izquierda o derecha según se indica.

1.- $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

x	0.9	0.99	0.999	1
f(x)	1.9	1.99	1.999	-

$x\to 1^+$ $\qquad$ $f(x)\to 2$ (Su límite es 2)

2.- $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-6x+8}{3x-6}$

x	2	2.001	2.01	2.1
f(x)	-	-0.6663	-0.6633	-0.6333

(su límite es -2/3) $\qquad -\dfrac{2}{3}\leftarrow f(x)$ $\qquad 2^+\leftarrow x$

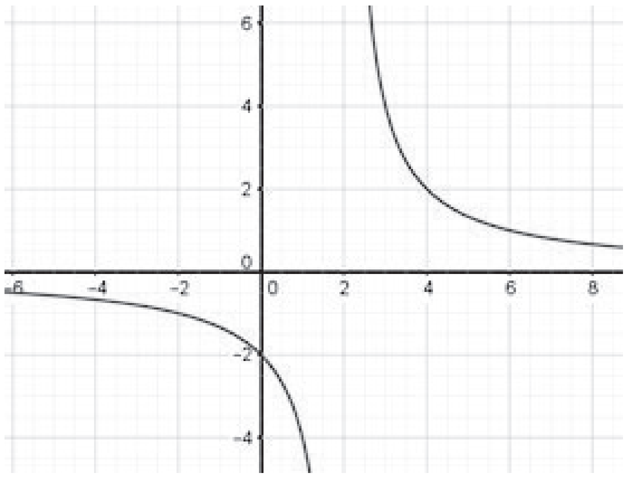
Ejercicio: Determinar el límite de la función $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ aplicando factorización y por acercamiento a la derecha y a la izquierda de x = 1.

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
f(x)				-			

Límites infinitos

Consideremos la función racional $f(x) = \frac{4}{x - 2}$, la cual graficaremos determinando sus asíntotas.

Asíntota vertical x – 2 = 0, entonces x = 2, asíntota horizontal f(x) = 0



Se observa que $f(x)$ decrece cuando $x \to 2$ desde la izquierda y $f(x)$ crece cuando $x \to 2$ desde la derecha.

Se visualiza en la siguiente tabla como ambas curvas tienden al infinito cuando $x \to 2$

x	1.9999	1.999	2	2.001	2.0001
f(x)	$-\infty$	-3000	-	3000	$+\infty$

Ejemplos:

Determinar si se tiende hacia el infinito positivo o negativo, cuando “x” se aproxima, por la derecha o izquierda, hacia la asíntota vertical.

1.- $\lim_{x \to 2^-} \frac{3x}{x - 2} = \frac{3(1.999)}{1.999 - 2} = \frac{5.997}{-0.001} = -5997 = -\infty$

2.- $\lim_{x \to 4^+} \frac{x^2}{4 - x} = \frac{(4.0001)^2}{4 - 4.0001} = \frac{16.0008}{-0.0001} = -160008 = -\infty$

3

ACTIVIDAD

Determina si se tiende hacia el infinito positivo o negativo, cuando "x" se aproxima hacia el valor indicado:

1.- $\lim_{x \to 3^-} \frac{6x}{x-3}$

3.- $\lim_{x \to 1^-} \frac{6}{x-1}$

5.- $\lim_{x \to \frac{1}{4}^-} \frac{3x-2}{4x+1}$

2.- $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{2-x}$

4.- $\lim_{x \to 5^-} \frac{x}{x-5}$

6.- $\lim_{x \to -4^+} \frac{9}{2x+8}$

Aplicaciones

Se ha estimado que la población de un barrio de una gran ciudad evolucionará siguiendo el modelo $f(t)=\frac{240+20t}{16+t}$ en miles de habitantes, donde t indica los años transcurridos desde su creación en 2005.

a) ¿Qué población tenía en 2015?

$$\lim_{t\to 10}\frac{240+20t}{16+t}=\frac{240+20(10)}{16+10}=16{,}923hab$$

b) ¿A largo plazo con cuanta población se estabilizará?

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{240}{t}+\frac{20t}{t}}{\frac{16}{t}+\frac{t}{t}}=\frac{0+20}{0+1}=20{,}000hab$$

Resuelve:

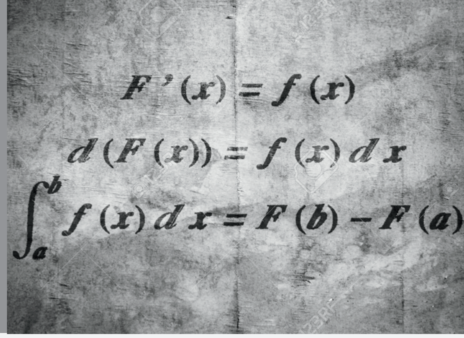
1. Un tanque contiene 5000 litros (l) de agua pura. Se bombea al tanque salmuera que contiene 30 gr de sal por litro de agua, a razón de 25 l/min. Demuestra que la concentración de sal después de t minutos (en gramos por litro) es:

$$C(t)=\frac{30t}{200+t}$$

¿Qué sucede a la concetración cuando $t\to\infty$?

2. Una maquiladora que elabora libretas determina que el costo promedio de su producción puede modelarse mediante la ecuación $C(x)=\frac{24+12x}{x}$, siendo x el número de libretas producidas. ¿Cuál será el costo de producción si se producen 100 libretas?

PROGRESIÓN 7



Interpreta, a partir de integrar diferentes perspectivas y métodos, el concepto central del cálculo diferencial, "la derivada", de forma intuitiva e intenta dar una definición formal, así como la búsqueda heurística para encontrar la derivada de la función constante, lineal y algunas funciones polinomiales.

CATEGORÍAS	METAS DE APRENDIZAJE
C1. Procedural. **C2.** Procesos de intuición y razonamiento.	**M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. **M5.** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.
SUBCATEGORÍAS	
SC1.2. Elementos geométricos. **SC1.3.** Elementos variacionales. **SC2.1.** Capacidad para observar y conjeturar. **SC2.3.** Pensamiento formal.	

Contenidos específicos de la progresión

7.1. Razones de cambio: Definición de derivada.
7.2. Derivación mediante la regla de los 4 pasos.

Descripción de la progresión:

En la siguiente progresión se presentan diferentes actividades que pretenden introducir a las y los estudiantes a la definición de la derivada, su interpretación intuitiva y determinación mediante la regla de los 4 pasos. Siendo importante considerar a una razón de cambio como un proceso que puede definirse con la derivada de su función.

Razones de cambio: la derivada

Estudiar el cambio y el movimiento es parte fundamental de estudiar derivadas, de manera que, estudiar la pendiente de una recta tangente a una curva y la velocidad instantánea es considerar que son **razones de cambio** de una función, y por lo tanto son aplicaciones del cálculo diferencial.

Así por ejemplo, la velocidad de una partícula es la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo; la potencia es la razón de cambio del trabajo con respecto al tiempo; el costo marginal es la razón de cambio del costo de producción respecto al tiempo, etc. De hecho, el cálculo de razones de cambio es importante en todas las ciencias naturales, sociales y en la ingeniería.

Y como todas las razones de cambio se pueden interpretar como pendientes de tangentes, esto nos permite tener la definición de la **derivada.**

Es importante considerar que f´(x) es la derivada de f(x)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo 1: Encuentre la derivada de la función $f(x) = x^2 - 8x + 9$

Primer paso: hacer que la variable *x* tome el valor de *x* + *h* en la función *f(x).*

$$f(x) = x^2 - 8x + 9$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[(x+h)^2 - 8(x+h) + 9\right] - \left(x^2 - 8x + 9\right)}{h}$$

Segundo paso: se resuelve para x + h, de manera que se eleva el binomio a la potencia y/o se multiplica por el coeficiente indicado en la función:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[(x+h)^2 - 8(x+h) + 9\right] - \left(x^2 - 8x + 9\right)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left(x^2 + 2xh + h^2 - 8x - 8h + 9\right) - \left(x^2 + 8x + 9\right)}{h}$$

Tercer paso: Se hace la resta de la función f(x) y se simplifica, factorizando el numerador:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 8x - 8h + 9 - x^2 + 8x + 9}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 8h}{h} = \frac{h(2x + h - 8)}{h}$$

Cuarto paso: una vez factorizado, y eliminado la variable h del denominador, se procede a determinar el límite para cuando h tiende a cero.

$f'(x) = \lim_{h \to 0} (2x + h - 8)$

$f'(x) = 2x + 0 - 8$

$f'(x) = 2x - 8$

La derivada de la función $f(x) = x^2 - 8x + 9$ **es** $f'(x) = 2x - 8$

De manera más simplificada veremos los siguientes ejemplos aplicando la regla de los cuatro pasos.

Ejemplo 2: Encuentre la derivada de la función $f(x) = 3 - x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[3 - (x+h)^2\right] - \left(3 - x^2\right)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3 - x^2 - 2xh - h^2 - 3 + x^2}{h}$$

$$f'(x) = im_{h \to 0} \frac{-2xh - h^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(-2x - h)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (-2x - h)$$

$$f'(x) = -2x - 0 = -2x$$

Ejemplo 3: Encuentre la derivada de la función $f(x) = 5x^2 + 1$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[5(x+h)^2 + 1\right] - \left(5x^2 + 1\right)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[5\left(x^2 + 2xh + h^2\right) + 1\right] - \left(5x^2 + 1\right)}{h}$$

$$f'(x) = im_{h \to 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 + 1 - 5x^2 - 1}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(10x + 5h)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (10x + 5h)$$

$$f'(x) = 10x + 5(0) = 10x$$

1 **ACTIVIDAD**

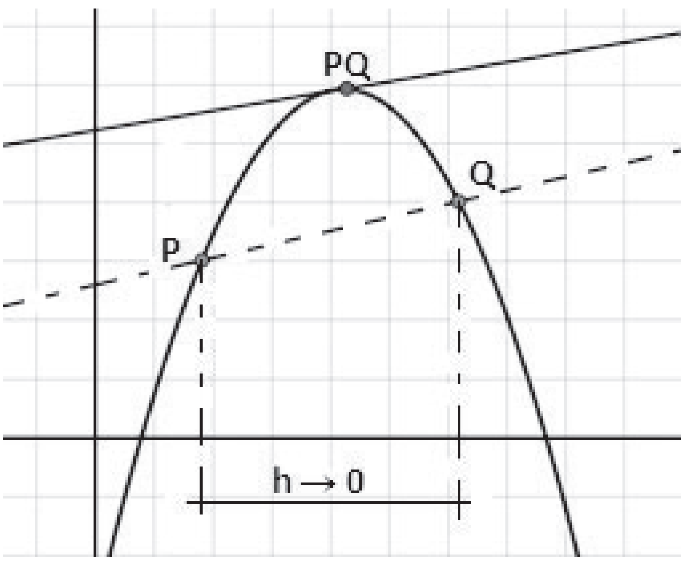
Determina la derivada de las siguientes funciones.

1.- Encuentra la derivada de la función $f(x)=3x+x^2$
2.- Encuentra la derivada de la función $f(x)=-2x^2+5$
3.- Encuentra la derivada de la función $f(x)=3x$
4.- Encuentra la derivada de la función $f(x)=2x-6$
5.- Encuentra la derivada de la función $f(x)=x^3$

Determinación de la pendiente de una recta tangente a una curva a partir de la derivada de la misma curva, en un punto dado.

En la progresión 2 se determinó la ecuación de la recta tangente y puede observarse su relación con la definición de la derivada de una función.

$$m\tan = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



Por lo que puede aplicarse el concepto de la derivada para calcular la ecuación y la pendiente de esa recta, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: Encuentre una ecuación de la recta tangente a $y = x^2$, en el punto P(1, 1).
Calculamos primero la pendiente de la recta tangente.

$$m\tan = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

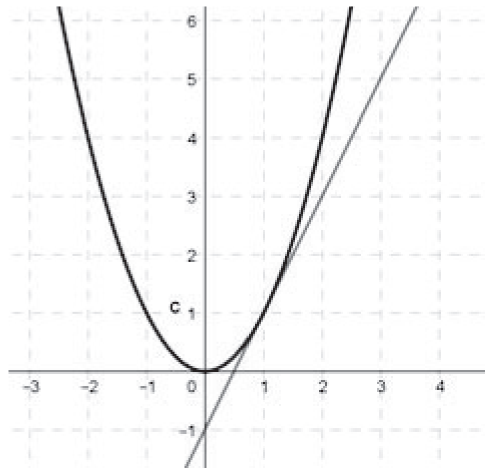
$$m\tan = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$m\tan = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$m\tan = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$m\tan = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$m\tan = 2x + 0 = 2x$$



En el punto P(1, 1), la pendiente de la recta tangente es m = 2(1) = 2, y la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = 2(x-1)$$
$$y = 2x - 1$$

Ejemplo 2: Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{3}{x}$ en el punto P(3, 1).

$$m\tan = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

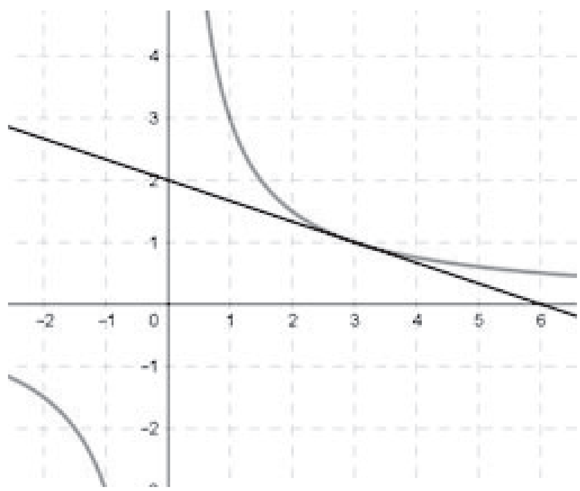
$$m\tan = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{x+h} - \frac{3}{x}}{h}$$

$$m\tan = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3x - 3(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$m\tan = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-3h}{x(x+h)}}{h}$$

$$m\tan = \lim_{h\to 0} \frac{-3}{x^2 + h}$$

$$m\tan = -\frac{3}{x^2}$$



En el punto P(3, 1), la pendiente de la recta tangente es $y=-\frac{3}{3^2}=-\frac{1}{3}$, y la ecuación de la recta:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-1=-\frac{1}{3}(x-3)$$
$$3y-3=-x+3$$
$$x+3y-6=0$$

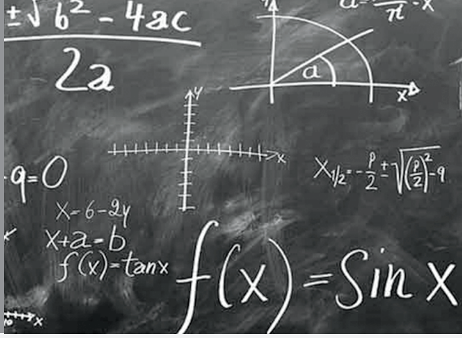
2 ACTIVIDAD

1.- Encuentra la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)=-x^2+2x+2$, en x = 2

2.- Encuentra la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)=-2x^2+4x$, en x = 1.5

3.- Encuentra la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)=x^2-3$, en x = 1

PROGRESIÓN 8



Encuentra de manera heurística algunas reglas de derivación como la regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena y las aplica en algunos ejemplos.

CATEGORÍAS	METAS DE APRENDIZAJE
C2. Procesos de intuición y razonamiento **C3.** Solución de problemas y modelación	**M6.** Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos. **M11.** Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.
SUBCATEGORÍAS	
SC2.1. Capacidad para observar y conjeturar **SC2.3.** Pensamiento formal **SC3.1.** Uso de modelos **SC3.3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios	

Contenidos específicos de la progresión

8.1. Reglas de derivación
- 8.1.1. Derivada de funciones algebraicas.
- 8.1.2. Derivada de producto de funciones.
- 8.1.3. Derivada de cociente de funciones.
- 8.1.4. Regla de la cadena.
- 8.1.5. Derivada de funciones radicales

8.2. Derivadas de orden superior

Descripción de la progresión:

En esta progresión se aplicarán fórmulas para derivar todo tipo de funciones algebraicas, tanto si se realizan con ellas productos, divisiones, raíces o potencias. Se pondrán en práctica con el propósito de agilizar los cálculos, ya que por el método de los 4 pasos serían más complejos. El cálculo diferencial por definición es el estudio de las derivadas, y en ello radica la importancia del buen manejo de las fórmulas de derivación.

Reglas de derivación

Después de usar la definición de derivada para todas aquellas funciones que sufren razones de cambio, es necesario utilizar reglas de derivación para facilitar el manejo numérico y algebraico.

Estas reglas de derivación nos permiten calcular con relativa facilidad las derivadas de polinomios, funciones racionales y funciones trascendentales (exponenciales, logarítmicas y trigonométricas).

Así mismo, se aplican en la resolución de problemas en las que intervienen razones de cambio y en análisis de gráficas (valores máximos, mínimos, puntos de inflexión y concavidad).
Los símbolos utilizados para indicar derivación pueden ser:

$$y' = f'(x) = \frac{}{dx} = Dx$$

- $\frac{dy}{dx}$ se lee "la derivada de   con respecto a x".
- y' se lee " y prima" y denota la derivada de y con respecto a x .

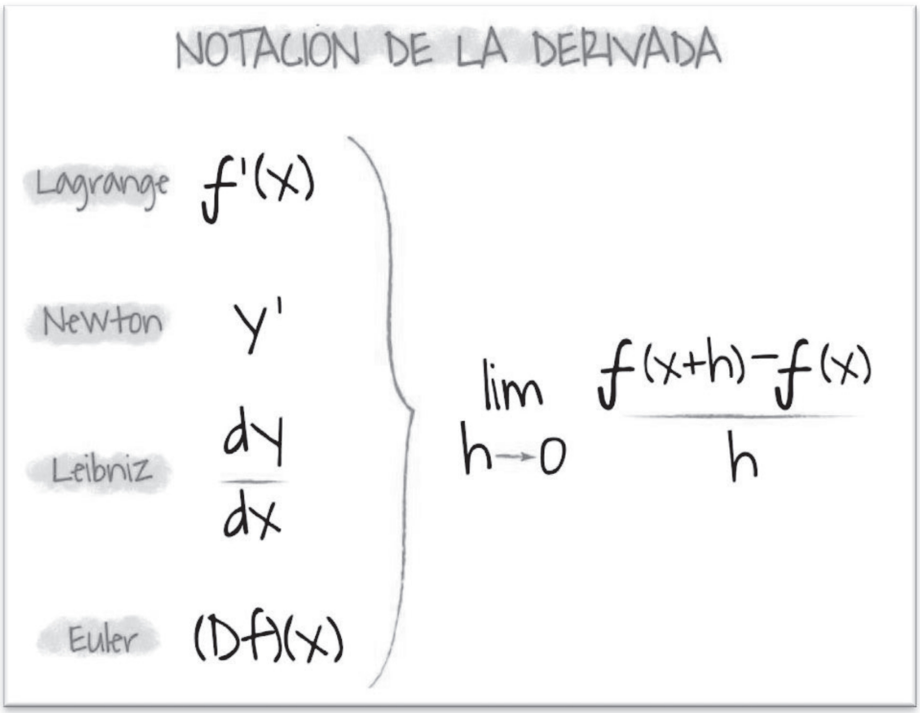


Fig. 1. Notación de derivada

Formulario de derivación

Si tenemos la función $f(x)$	Si tenemos la función $f(x)$
$f(x)=c$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=cx$	$f'(x)=c$
$f(x)=cx^n$	$f'(x)=ncx^{n-1}$
$h(x)=f(x)+g(x)$	$h'(x)=f'(x)+g'(x)$
$f(x)=U^n$	$f'(x)=nU^{n-1}du$
$f(x)=\sqrt{U}$	$f'(x)=\dfrac{du}{2\sqrt{U}}$
$f(x)=UV$	$f'(x)=Udv+Vdu$
$f(x)=\dfrac{U}{V}$	$f'(x)=\dfrac{Vdu-Udv}{V^2}$
$f(x) \quad senU$	$f'(x)=\cos Udu$
$f(x)=\cos U$	$f'(x)=-senUdu$
$f(x)=\tan U$	$f'(x)=\sec^2 Udu$
$f(x)=\cot U$	$f'(x)=-\csc^2 Udu$
$f(x)=\sec U$	$f'(x)=\sec U \tan U d\imath$
$f(x)=a^U$	$f'(x)=a^U \ln(a)du$
$f(x)=e^U$	$f'(x)=e^U du$
$f(x)=\ln(U)$	$f'(x)=\dfrac{du}{U}$
$f(x)=\log_a U$	$f'(x)=\dfrac{du}{U\ln(a)}$

Reglas de derivación con ejemplos

1. Derivada de una constante:

Si tenemos la función $f(x)=c$	**La derivada es:** $f'(x)=0$
$f(x)=4$ $f'(x)=0$	$f(x)=\frac{2}{3}$ $f'(x)=0$

2. Derivada de la función identidad:

Si tenemos la función $f(x)=x$	**La derivada es:** $f'(x)=1$
$f(x)=x$ $f'(x)=1$	

3. Derivada de una constante por una variable:

Si tenemos la función $f(x)=cx$	**La derivada es:** $f'(x)=c$
$f(x)=6x$ $f'(x)=6$	$f(x)=-0.8x$ $f'(x)=-0.8$

4. Derivada de una potencia entera positiva:

Si tenemos la función $f(x)=x^n$	**La derivada es:** $f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=x^7$ $f'(x)=7x^{7-1}$ $f'(x)=7x^6$	$f(x)=x^5$ $f'(x)=5x^{5-1}$ $f'(x)=5x^4$

5.Derivada de una constante por una función:

Si tenemos la función $f(x)=cx^{n}$	**La derivada es:** $f'(x)=ncx^{n-1}$
$f(x)=8x^{3}$ $f'(x)=3\cdot 8x^{3-1}$ $f'(x)=24x^{2}$	$f(x)=5x^{-6}$ $f'(x)=-30x^{-7}$ $f'(x)=-\frac{30}{x^{7}}$

6. Derivada de una potencia entera negativa:

Si tenemos la función $f(x)=x^{-n}$	**La derivada es:** $f'(x)=-nx^{-n-1}$
$f(x)=x^{-3}$ $f'(x)=-3x^{-3-1}$ $f'(x)=-3x^{-4}$	$f(x)=\frac{1}{x^{5}}$ $f(x)=x^{-5}$ $f'(x)=-5x^{-6}$ $f'(x)=-\frac{5}{x^{6}}$

7. Derivada de exponentes racionales:

Si tenemos la función $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$	**La derivada es:** $f'(x)=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$
$f(x)=x^{\frac{3}{4}}$ $f'(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}$ $\quad \frac{3}{4}-\frac{4}{4}=-\frac{1}{4}$ $f'(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$	$f(x)=3x^{\overline{3}}$ $f'(x)=\frac{2}{3}\cdot 3x^{\frac{2}{3}-1}$ $\quad \frac{2}{3}-\frac{3}{3}=-\frac{1}{3}$ $f'(x)=2x^{-\frac{1}{3}}$

8. Derivada de la suma de funciones:

Si tenemos la función $h(x)=f(x)+g(x)$	**La derivada es:** $h'(x)=f'(x)+g'(x)$
$f(x)=2x^{3}+4x^{2}+3x+5$ $f'(x)=3\cdot 2x^{3-1}+2\cdot 4x^{2-1}+3(1)+0$ $f'(x)=6x^{2}+8x+3$	$f(x)=\frac{3}{4}x^{2}-\frac{4}{5}x-5$ $f'(x)=2\cdot\frac{3}{4}x^{2-1}-\frac{4}{5}(1)+0$ $f'(x)=\frac{3}{2}x-\frac{4}{5}$

1

ACTIVIDAD

Deriva las siguientes funciones algebraicas utilizando las fórmulas de derivación.

Responde...

a) $f(x)=x^6$

b) $f(x)=x^3-x^2$

c) $f(x)=2x^2-3x$

d) $f(x)=8x^3-3x^2+5$

e) $f(x)=6x^5-3x^4+2x^2+7$

f) $f(x)=\frac{2}{7}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{6}{9}x$

g) $f(x)=9x^{-4}+3x^{-3}+5x$

h) $f(x)=\frac{6}{x^3}+\frac{5}{x^4}$

i) $f(x)=\frac{2}{5x^2}+\frac{3}{2x^3}$

j) $f(x)=4x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{3}{4}}$

9. Derivada de la potencia de una función:

Si tenemos la función $f(x)=U^n$	**La derivada es:** $f'(x)=nU^{n-1}du$
$f(x)=(6x+3)^3$ $U=6x+3$ $du=6$ $f'(x)=3(6x+3)^{3-1}(6)$ $f'(x)=18(6x+3)^2$	$f(x)=(-2x+5)^4$ $U=-2x+5$ $du=-2$ $f'(x)=4(-2x+5)^{4-1}(-2)$ $f'(x)=-8(-2x+5)^3$

10. Derivada de la raíz de una función:

Si tenemos la función $f(x)=\sqrt{U}$	**La derivada es:** $f'(x)=\dfrac{du}{2\sqrt{U}}$
$f(x)=\sqrt{2x-5}$ $U=2x-5$ $du=2$ $f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x-5}}$ $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}$ De acuerdo a la ley de los exponentes $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ También podemos plantear la función como: $f(x)=(2x-5)^{\frac{1}{2}}$ y desarrollar $f(x)=U^n$	$f(x)=\sqrt{6-2x^3}$ $U=6-2x^3$ $du=-6x^2$ $f'(x)=\dfrac{-6x^2}{2\sqrt{6-2x^3}}$ $f'(x)=\dfrac{-3x^2}{\sqrt{6-2x^3}}$ De acuerdo a la ley de los exponentes $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ También podemos plantear la función como: $f(x)=(6-2x^3)^{\frac{1}{2}}$ y desarrollar $f(x)=U^n$

11. Derivada del producto de dos funciones:

Si tenemos la función $f(x)=UV$	**La derivada es:** $f'(x)=Udv+Vdu$
$f(x)=UV$ $f(x)=(2x+1)(6x-3)$ $U=2x+1 \qquad V=6x-3$ $du=2 \qquad dv=6$ $f'(x)=(2x+1)(6)+(6x-3)(2)$ $f'(x)=12x+6+12x-6$ $f'(x)=24x$	$f'(x)=Udv+Vdu$ $f(x)=(4x^2-9)(2x+5)$ $U=4x^2-9 \qquad V=2x+5$ $du=8x \qquad dv=2$ $f'(x)=(4x^2-9)(2)+(2x+5)(8x)$ $f'(x)=8x^2-18+16x^2+40x$ $f'(x)=24x^2+40x-18$

12. Derivada del cociente de dos funciones:

Si tenemos la función $f(x)=\frac{U}{V}$	**La derivada es:** $f'(x)=\frac{Vdu-Udv}{V^2}$
$f(x)=\frac{2x+1}{3x+4}$ $U=2x+1 \qquad V=3x+4$ $du=2 \qquad dv=3$ $f'(x)=\frac{(3x+4)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+4)^2}$ $f'(x)=\frac{6x+8-6x-3}{(3x+4)^2}$ $f'(x)=\frac{5}{(3x+4)^2}$	$f(x)=\frac{2x^2-1}{5x+3}$ $U=2x^2-1 \qquad V=5x+3$ $du=4x \qquad dv=5$ $f'(x)=\frac{(5x+3)(4x)-(2x^2-1)(5)}{(5x+3)^2}$ $f'(x)=\frac{20x^2+12x-10x^2+5}{(5x+3)^2}$ $f'(x)=\frac{10x^2+12x+5}{(5x+3)^2}$

2 ACTIVIDAD

Deriva las siguientes funciones algebraicas utilizando las fórmulas de derivación.

Responde...

1. $f(x)=(3x+1)^3$	6. $f(x)=\sqrt{5x+2}$	11. $f(x)=4x(x-5)^8$
2. $f(x)=(x-3)^2$	7. $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{3x^3+5}$	12. $f(x)=\dfrac{(2x+2)^3}{4x^2}$
3. $f(x)=(3x+5)(4x^2+x)$	8. $f(x)=\dfrac{4x+1}{x^2}$	13. $f(x)=(2x-4)(x^2+2)^4$
4. $f(x)=(2x^2+2)(x^3-1)$	9. $f(x)=(4x^2+2)^6$	14. $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x^2-8x}}$
5. $f(x)=\sqrt{4x^2+x}$	10. $f(x)=\sqrt[3]{x^5-3x}$	15. $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$

Derivadas de orden superior

Sea $f(x)$ una función diferenciable, entonces se dice que $f'(x)$ es la primera derivada de $f(x)$.

Puede resultar $f'(x)$ ser una función derivable, entonces podríamos encontrar su segunda derivada, es decir $f''(x)$. Mientras las derivadas cumplan ser funciones continuas y que sean derivables podemos encontrar la n-ésima derivada. A estas derivadas se les conoce como Derivadas de orden superior.

$$f(x)=x^3+2x^2-3x-5$$
$$f'(x)=3x^2+4x-3$$
$$f''(x)=6x+4$$
$$f'''(x)=6$$

$$f(x)=5x^3-x^2+x$$
$$f'(x)=15x^2-2x$$
$$f''(x)=30x-2$$
$$f'''(x)=30$$

3 ACTIVIDAD

Determina la segunda y tercera derivada de las siguientes funciones.

Responde...

1. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x - 5$

2. $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 5x - 1$

3. $f(x) = x^2 - x - 2$

4. $f(x) = -x^2 - 5x + 3$

5. $f(x) = (x+1)(x+2)$

6. $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$

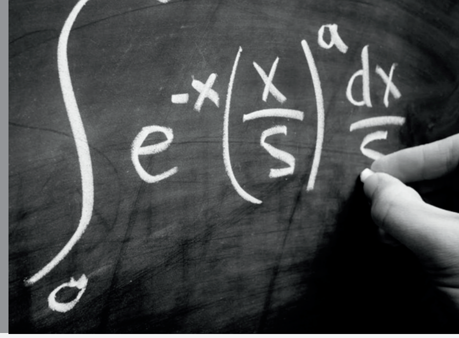
7. $f(x) = (x+1)^3$

8. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

9. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \sqrt{x}$

PROGRESIÓN 9



Selecciona una problemática en la que el cambio sea un factor fundamental en su estudio para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea.

CATEGORÍAS	METAS DE APRENDIZAJE
C2. Procesos de intuición y razonamiento	**M5.** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.
SUBCATEGORÍAS	
SC1.2. Elementos geométricos **SC2.3.** Pensamiento formal	

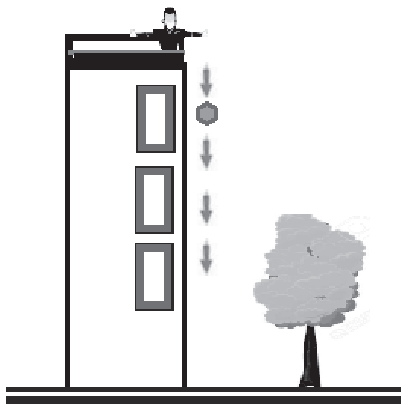
Contenidos específicos de la progresión

9.1. Aplicaciones de derivada como razón de cambio instantánea.

Descripción de la progresión:

En esta progresión se presenta de inicio una situación didáctica en la que se analiza el movimiento y da pie al estudio de la derivada como razón de cambio. Siendo el cálculo de la velocidad instantánea una de las aplicaciones más importantes de la derivada, pero además se describe otras aplicaciones de razón de cambio instantánea con respecto al tiempo, tales como disminución o aumento de una columna de agua al paso del tiempo.

Cuando un objeto se desplaza en caída libre



Antonio sube a la azotea del edificio donde se encuentra trabajando y desde una altura de 16 m deja caer un objeto con el propósito de calcular el tiempo en que llegará al suelo, pero le surgen otras preguntas.

¿Cuál será su velocidad a los 2 segundos de haberlo dejado caer?

¿Con qué velocidad llegará al suelo?

Antonio sabe que por ser caída libre la fuerza de gravedad aumenta su velocidad, ¿qué aceleración le incrementa?

Determinación de velocidad instantánea de un móvil a partir de la derivada de su función de desplazamiento.

Como ya se ha visto, la velocidad instantánea es una razón de cambio de la rapidez. Calcular la velocidad instantánea implica obtener la velocidad que un móvil tiene en un preciso instante de tiempo, por lo cual, si se deriva su función de desplazamiento podemos encontrar su velocidad instantánea y la altura máxima que alcanza si el objeto se desplaza hacia arriba.

Si un objeto se mueve a lo largo de una línea curva de acuerdo con una ecuación de movimiento $S = f(t)$, donde S es el desplazamiento del objeto, en el instante "t", la velocidad instantánea es el límite del valor de las velocidades promedio sobre periodos cada vez más cortos de tiempo $(t \to 0)$, es decir, $(h \to 0)$.

$Vinst. = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ pero por cuestiones prácticas aplicaremos las fórmulas de derivación vistas en la progresión anterior.

Ejemplo 1: Dejamos caer un objeto desde la azotea de un edificio de 16 m de altura como lo hizo Antonio. Consideraremos de manera aproximada que $S=f(t)=4.9t^2$, para un objeto en caída libre.

a) Determina la derivada de su función de desplazamiento.
b) ¿Cuál es la velocidad instantánea del objeto después de 2 segundos?
c) ¿Con qué velocidad viaja cuando choca contra el suelo?

a) $$S = f(t) = 4.9t^2$$
$$f'(t) = 9.8t$$

b) Velocidad a los 2 segundos
$$Vinst. = 9.8t$$
$$Vinst. = 9.8(2) = 19.6 m/s$$

c) Cuando choca el objeto en el suelo es porque recorrió completamente los 16 metros de altura del edificio. Para calcular el tiempo que tardó en llegar al suelo se despeja en su función de desplazamiento:

$16 = 4.9t^2$

$t = \sqrt{\dfrac{16}{4.9}} = 3.26seg$ Tardó 3.26 segundos en llegar al suelo.

$Vinst. = 9.8t$

$Vinst. = 9.8(3.26) = 31.94m/s$ A una velocidad de 31.94 m/s

Ejemplo 2: A partir de una altura de 4 m, un balón fue pateado alcanzando una velocidad cuya ecuación de desplazamiento es: $S=f(t)=-0.5t^2+3t+4$

a) Derivada de la función de desplazamiento.
b) Determina la velocidad instantánea del balón cuando transcurren 2 segundos y la altura alcanzada.
c) Velocidad instantánea cuando t = 4 segundos y la altura alcanzada.
d) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el balón?
e) ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando alcanza su altura máxima?

Solución:

a) $S = f(t) = -0.5t^2 + 3t + 4$
$f'(t) = -t + 3$

b) $Vinst. = -t + 3 = -(2) + 3 = 1m/s$,

Altura $S = f(t) = -0.5t^2 + 3t + 4$
$S = -0.5(2)^2 + 3(2) + 4 = -2 + 6 + 4 = 8m$

c) $Vinst. = -t + 3 = -(4) + 3 = -1m/s$,

Altura $S = f(t) = -0.5t^2 + 3t + 4$
$S = -0.5(4)^2 + 3(4) + 4 = -8 + 12 + 4 = 8m$

d) Para que el balón alcance la atura máxima es porque su velocidad en ese instante debe ser cero.

$Vinst. = 0$

$0 = -t + 3$

$t = \dfrac{-3}{-1} = 3segundos$ Alcanza su velocidad máxima a los tres segundos.

Altura máxima: $S = f(t) = -0.5t^2 + 3t + 4$
$S = -0.5(3)^2 + 3(3) + 4 = -4.5 + 9 + 4 = 8.5m$

1 ACTIVIDAD

Aplica la fórmula de la derivada, determina la ecuación de la velocidad instantánea y contesta las preguntas planteadas.

Responde...

1. Un proyectil es lanzado a partir de una cierta altura, alcanzando una velocidad cuya ecuación de desplazamiento es: $S = f(t) = -t^2+30t+175$.

   a) Determina la velocidad instantánea cuando transcurren 10 segundos y la altura alcanzada.

   b) Velocidad instantánea cuando t = 15 segundos y la altura alcanzada.

   c) ¿A los cuántos segundos alcanza la altura máxima?

   d) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?

   e) ¿Desde qué altura es lanzado el proyectil?

2. La altura en pies de una cohete sobre el piso a los "t" segundos está dada por la expresión $S(t)= -16t^2+40t+100$.

   a) ¿Cuál es su velocidad instantánea cuando t = 2 segundos?

   b) ¿A los cuántos segundos es cero la velocidad instantánea?

   c) ¿Cuál es su altura máxima?

3. Una esfera rueda hacia abajo en un largo plano inclinado de modo que su distancia "d" en pies, al punto de partida después de "t" segundos es $d(t)=4.5t^2+2t$. ¿Cuál será su velocidad instantánea a los 3 segundos?

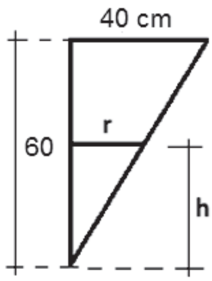
Razones de cambio: otras aplicaciones de la derivada

Si la variable "y" depende del tiempo "t", entonces la derivada $\dfrac{dy}{dt}$ se llama razón de cambio con respecto al tiempo. Esto requiere por lo general una derivación implícita.

Ejemplo 1: Un cono que se utiliza para guardar agua mide 80 cm de diámetro y 60 cm de altura, pero tiene una fisura por la cual fluye agua a razón de 25 cm3/minuto. ¿Con qué rapidez disminuye el nivel del agua cuando ésta tiene 20 cm de profundidad?

El volumen del recipiente cónico es: $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

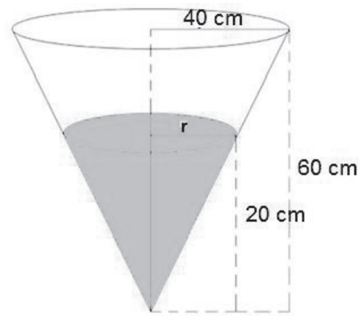
La relación que existe entre el radio de la columna de agua en el cono y su altura correspondiente es:



$$\frac{40}{60} = \frac{r}{h}$$

$$r = \frac{40h}{60}$$

$$r = \frac{2}{3}h$$



Por lo que su volumen se expresa:

$$V = \frac{\pi\left(\frac{2h}{3}\right)^2 h}{3} = \frac{\pi\left(\frac{4h^2}{9}\right)h}{3} = \frac{4\pi h^3}{27}$$

Derivando:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{12h^2\pi}{27}\left(\frac{dh}{dt}\right)$$

Sustituir la altura h por los 20 cm de altura del nivel de agua en el tiempo especificado y la variación de la velocidad en que disminuye el volumen.

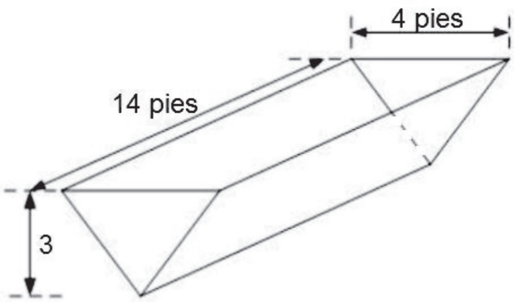
$$\frac{dV}{dt} = \frac{12h^2\pi}{27}\left(\frac{dh}{dt}\right)$$

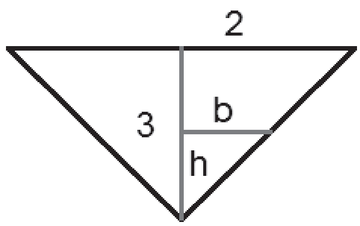
$$250 = \frac{12(20)^2\pi}{27}\left(\frac{dh}{dt}\right)$$

$$250 = 177.78\pi\left(\frac{dh}{dt}\right)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{250}{177.78\pi} = 0.45 cm/\min$$

Ejemplo 2: La longitud de un abrevadero es de 14 pies y sus extremos tienen la forma de un triángulo isósceles invertido (ver figura contigua) que tiene una altura de 3 pies y su base mide 4 pies. Se introduce agua al abrevadero a una tasa de 2 pies3/min. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta tiene una profundidad de 1 pie?





La fórmula para calcular el volumen del abrevadero es:

$$V = \left(\frac{bh}{2}\right)(L)$$

$$V = \left(\frac{bh}{2}\right)(14)$$

$$V = 7bh$$

Utilizando proporciones

$$\frac{2}{3} = \frac{b}{h}$$

$$b = \frac{2}{3}h$$

Derivando

$$V = 7\left(\frac{2}{3}h\right)(h)$$

$$V = \frac{14}{3}h^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{28}{3}h\left(\frac{dh}{dt}\right)$$

$$2 = \frac{28(1)}{3}\left(\frac{dh}{dt}\right)$$

$$\frac{6}{28} = \left(\frac{dh}{dt}\right)$$

$$\frac{dh}{dt} = 0.214\,pies/\min$$

2 ACTIVIDAD

Resuelve los siguientes problemas

Responde...

Problemas de razón de cambio. Problemas de rapidez de variación.

1. Se introduce agua en un depósito cónico de 6 m de altura y 3.5 m de radio a un ritmo de 4m3/min. ¿Con qué ritmo asciende el nivel de agua cuando el nivel es de 3 m?

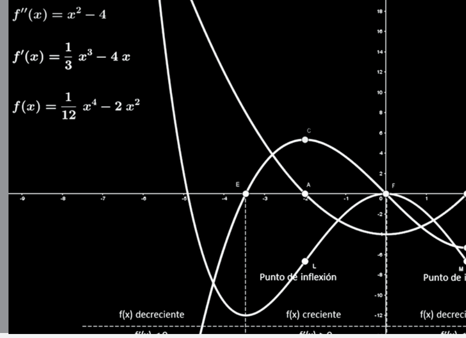
2. Un tanque para almacenar agua tiene la forma de un cono y se está llenando a una tasa de 3 metros cúbicos por minuto. La altura a del cono es de 30 metros y su radio b mide 10 metros. ¿Cuál es la rapidez a la que disminuye el nivel del agua cuando ésta tiene una profundidad h de 8 metros?

3. Un depósito horizontal para agua mide 16 metros de longitud y sus extremos son trapecios con una altura de 4 metros, base menor de 4 metros y base mayor de 6 metros. Se vierte agua en el depósito a una tasa de 10 metros cúbicos por minuto. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta ha alcanzado una profundidad de 2 metros?

4. En un recipiente cónico fluye agua a razón de 8 pies3/minuto. Si la altura del recipiente es de 12 pies y el radio de su base circular es de 6 pies. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando ésta tiene 4 pies de profundidad?

El volumen del recipiente cónico es $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

PROGRESIÓN 10



Explica y socializa el papel de la derivada para analizar una función (donde crece/decrece, máximo/mínimos locales, concavidades) y traza su gráfica.

CATEGORÍAS	METAS DE APRENDIZAJE
C1. Procedural **C2.** Procesos de intuición y razonamiento **C4.** Interacción y lenguaje matemático	**M3.** Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares. **M7.** Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto. **M13.** Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
SUBCATEGORÍAS	
SC1.2. Elementos geométricos **SC1.3.** Elementos variacionales **SC2.3.** Pensamiento formal **SC4.1.** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico **SC4.3.** Ambiente matemático de comunicación	

Contenidos específicos de la progresión

10.1. Puntos críticos de una función (Máximos y mínimos).
10.2. Puntos de inflexión usando el criterio de la segunda derivada.

Descripción de la progresión:

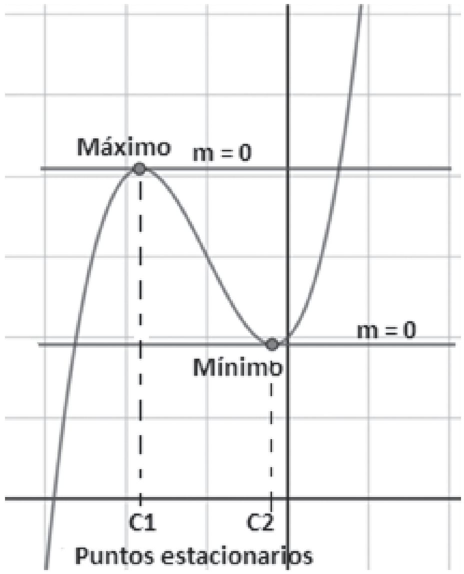
Se pretende en esta progresión que las y los estudiantes apliquen el concepto de derivada para realizar un análisis gráfico de la función. Mediante la derivada se podrá determinar los puntos críticos (máximo y mínimo de la función), así como el punto de inflexión e intervalos de concavidad, los cuales se relacionan con la altura máxima de un objeto que se desplaza hacia arriba o la optimización en área, perímetro y volumen.

Puntos críticos de una función: valores máximos y mínimos.

Algunas veces un problema puede formularse de tal manera que involucre maximizar o minimizar una función, lo que veremos más adelante.

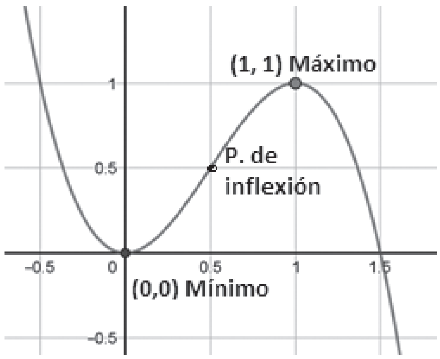
Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces tiene un valor máximo y un mínimo allí. Si "c" es un punto para el cual $f(c) = 0$ se llama punto estacionario y $f(c)$ tiene una tangente horizontal, es decir, m = 0, así, $(c, f(c))$ es un máximo o un mínimo, a los cuales tambien se les llama puntos críticos.

El punto de inflexión es el punto que indica el cambio de concavidad y se obtiene con la segunda derivada de la función.



Ejemplo 1: Encuentre los puntos críticos de $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ sobre el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2$$
$$f'(x) = -6x^2 + 6x$$
$$f'(x) = 0$$
$$0 = -6x^2 + 6x$$
$$0 = -6x(x-1)$$
$$x = 0$$
$$x = 1$$



Aunque existen criterios para determinar cuál de los puntos críticos es máximo y cuál es un mínimo, una manera práctica a utilizar es sustituir los valores x encontrados en la función f(x), y observar en su gráfica la posición de esas coordenadas.

$$f(x) = -2(0)^3 + 3(0)^2 = 0$$
$$P(0,0) Mínimo$$
$$f(x) = -2(1)^3 + 3(1)^2 = 1$$
$$P(1,1) Máximo$$

El punto de inflexión se obtiene con la segunda derivada.

$$f\;\;(x) = -12x + 6$$
$$0 = -12x + 6$$
$$x = \frac{6}{12} = 0.5$$

El punto de inflexión es P.I = (0.5, 0.5)

Ejemplo 2: Identifica los puntos críticos (valores máximos y mínimos), así como el punto de inflexión de la función $f(x)=4x^3+3x^2-6x+1$

$f(x)=4x^3+3x^2-6x+1$

$f'(x)=12x^2+6x-6$

$0=12x^2+6x-6$

$0=6(2x^2+x-1)$

$0=(2x-1)(x+1)$

$x=0.5$

$x=-1$

$f(x)=4(0.5)^3+3(0.5)^2-6(0.5)+1=-0.75$

$P(0.5,-0.75)\,Mínimo$

$f(x)=4(-1)^3+3(-1)^2-6(-1)+1=6$

$P(-1,6)\,Máximo$

Punto de inflexión:

$f''(x)=24x+6$

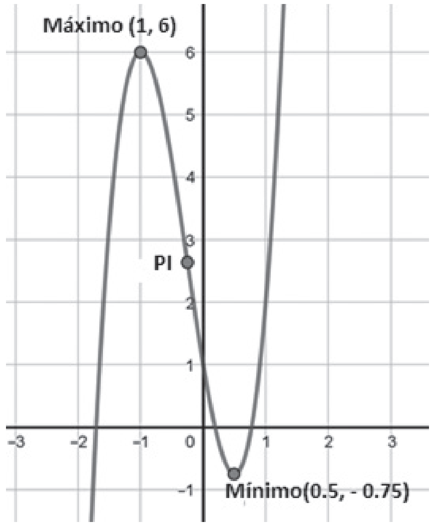
$0=24x+6$

$x=-\frac{6}{24}=-0.25$

$f(x)=4(-0.25)^3+3(-0.25)^2-6(-0.25)+1$

$f(x)=2.62$

$PI=(-0.25,2.62)$



Ejemplo 3: Identifica el valor máximo o mínimo que le corresponde a la función.

$f(x)=-x^2+4x-1$

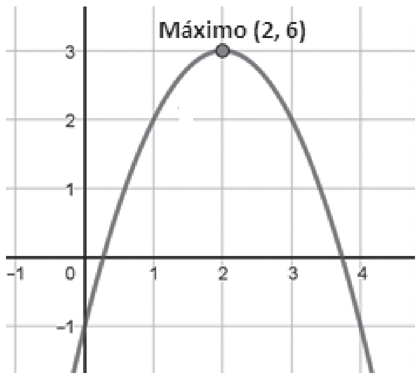
$f'(x)=-2x+4$

$0=-2x+4$

$x=2$

$f(x)=-2(2)^2+4(2)-1=3$

$(2,3)\,Máximo$



Una parábola sólo puede obtener un punto crítico, ya sea máximo o mínimo.

Actividad 1. Determina los puntos críticos y el punto de inflexión, indicando el valor máximo o mínimo de las siguientes funciones. Realiza la gráfica en hojas milimétricas o cuadriculadas.

a) $f(x)=-x^2+4x-1$

b) $f(x)=4x^3+3x^2-6x+1$

c) $f(x)=x^2-4x+2$

d) $f(x)=x^3+3x^2-x-3$

e) $f(x)=x^3+9x^2+20x+15$

f) $f(x)=x^4-4x^2$

Concavidad

Teorema de concavidad: Sea f una función dos veces derivable sobre un intervalo abierto I.

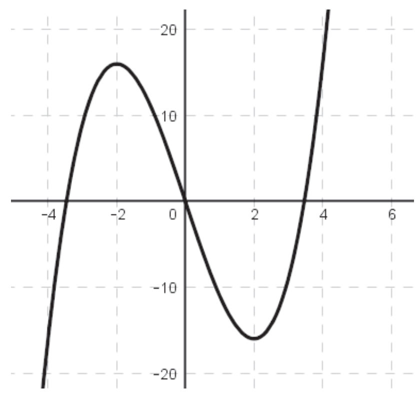
- Si $f''(x) > 0$ para toda *x* de *I*, entonces *f* es cóncava hacia arriba en *I*.
- Si $f''(x) < 0$ para toda *x* de *I*, entonces *f* es cóncava hacia abajo en *I*.

Ejemplo: sea la función $f(x) = x^3 - 12x$ determina en qué punto de la función ésta es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

$$f(x) = x^3 - 12x$$
$$f'(x) = 3x^2 - 12$$
$$3x^2 - 12 = 0$$
$$x^2 = \frac{12}{3}$$
$$x = \sqrt{4} = \pm 2$$

Para calcular puntos críticos $f'(x) = 0$

$$f(2) = (2)^3 - 12(2) = -16$$
$$(2,-16)\ Mínimo$$
$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = 16$$
$$(-2,16)\ Máximo$$



Punto de inflexión

$$f''(x) = 6x$$
$$6x = 0$$
$$x = 0$$

$$f(0) = (0)^3 - 12(0) = 0$$
$$PI = (0,0)$$

- Es creciente en el intervalo $(-\infty,-2] \cup [2,\infty)$
- Es decreciente en el intervalo $[-2,2]$

El punto de inflexión marca el cambio de concavidad, por lo que:

- Es cóncava hacia abajo $(-\infty,0)$. Cualquier punto en este intervalo, $f''(x) < 0$
  Por ejemplo: el punto de coordenada (-2, 16), $f''(x) = 6x$
  $$f''(-2) = 6(-2) = -12$$

- Es cóncava hacia abajo $(-\infty,0)$. Cualquier punto en este intervalo, $f''(x) < 0$
  Por ejemplo: el punto de coordenada (2, -16), $f''(x) = 6x$
  $$f''(2) = 6(2) = 12$$

PROGRESIÓN 11

Resuelve problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento empleando funciones y aplicando la derivada (e. g. problemas de optimización), organiza su procedimiento y lo somete a debate.

CATEGORÍAS	METAS DE APRENDIZAJE
C2. Procesos de intuición y razonamiento **C3.** Solución de problemas y modelación **C4.** Interacción y lenguaje matemático **SUBCATEGORÍAS** **SC2.1.** Capacidad para observar y conjeturar **SC2.3.** Pensamiento formal **SC3.2.** Construcción de modelos **SC3.3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios **SC4.1.** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico **SC4.3.** Medio matemático de comunicación	**M7.** Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto. **M11.** Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático. **M13.** Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.

Contenidos específicos de la progresión

11.1. Problemas de optimización.

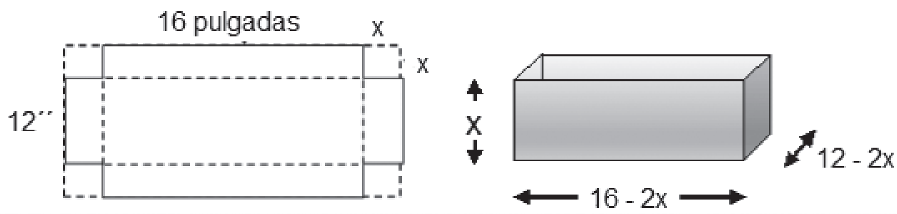
Descripción de la progresión:

En la siguiente progresión, a partir de diferentes actividades, se reconocerá la optimización como una de las aplicaciones de mayor importancia de la derivada. Se obtendrá el volumen y área máxima, con la menor cantidad de material o perímetro y con el menor costo.

Optimización: otra aplicación de la derivada

La cooperativa de "San Francisco" en la zona agrícola del valle, que produce y vende dátiles, quiere exportar producto empaquetado, por lo cual necesita una pequeña caja que pueda contener el producto, con volumen máximo que le represente un costo mínimo.

La empresa papelera les pide a los empleados Jorge y Luis que diseñen la caja y les da la instrucción de elaborarla a partir de una hoja de cartón rectangular abierta por la parte superior de 12" x 16", en la cual se corten cuadrados en sus esquinas para unir las "pestañas" y formar la caja, como se muestra en la figura.



De acuerdo al corte de las esquinas, el cálculo del volumen de la caja queda expresado como:

$$V = (16-2x)(12-2x)(x)$$
$$V = 192x - 56x^2 + 4x^3$$

Veamos dos opciones de solución, la primera propuesta por Jorge y la segunda por Luis.

1) Jorge propone diferentes valores de 'x', aplicando la expresión para el volumen:

$$V = 192x - 56x^2 + 4x^3$$

X (pulgadas)	Volumen (pulgadas^3)
1	$V = 192(1) - 56(1)^2 + 4(1)^3 = 140$
2	$V = 192(2) - 56(2)^2 + 4(2)^3 = 192$
3	$V = 192(3) - 56(3)^2 + 4(3)^3 = 180$
4	$V = 192(4) - 56(4)^2 + 4(4)^3 = 128$
5	$V = 192(5) - 56(5)^2 + 4(5)^3 = 60$

Jorge se da cuenta que la caja debe tener una altura de 2 pulgadas y un poco más, pero menor a tres pulgadas, no sabe con precisión la cantidad exacta.

2) Luis decide calcular la derivada de la función V(x) del volumen e igualar a cero, para obtener los puntos críticos (máximo y/o mínimo).

Aplicando la derivada a la función obtiene: $V(x)=192x-56x^2+4x^3$.

$$V'(x)=192-112x+12x^2$$
$$192-112x+12x^2=0$$

Posteriormente resuelve la ecuación cuadrática resultante y determina los valores críticos:

Por fórmula general: donde a = 12, b = -112, c = 192

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{-(-112)\pm\sqrt{(-112)^2-4(12)(192)}}{2(12)}$$
$$x=\frac{112\pm\sqrt{12544-9216}}{24}$$
$$x=\frac{112\pm\sqrt{3328}}{24}$$
$$x_1=\frac{112+57.69}{24}=7.07$$
$$x_1=\frac{112-57.69}{24}=2.26$$

Para lo que sustituye los valores x en la función del volumen.

Si el corte de la esquina mide x = 7.07, su volumen será mínimo
$V(x)=192(7.07)-56(7.07)^2+4(7.07)^3=-28.14\,pl^3$

Este resultado es imposible por ser negativo.

Si el corte de la esquina mide x = 2.26, su volumen será máximo
$V(x)=192(2.26)-56(2.26)^2+4(2.26)^3=194.07\,pl^3$

De esta manera Luis llega a la conclusión que la caja debe tener una altura de 2.26 pulgadas.

Largo de 16 – 2x, es decir, 16 – 2(2.26) = 11.48 pulgadas
Ancho de 12 – 2x, es decir, 12 – 2(2.26) = 7.48 pulgadas

Como podrás observar en esta situación, la derivada es un procedimiento matemático importante para **optimizar** recursos (área máxima, volumen máximo, costo mínimo, perímetro mínimo, entre otras aplicaciones), requiriéndose contar con la expresión que modela la situación o fenómeno.

Cuando se requiera resolver problemas de optimización, debe entonces derivarse la expresión requerida, como se verá en los siguientes ejemplos:

Área máxima

Se elaborará una ventana de dos hojas de igual tamaño. Se dispone de 6.5 m de perfil de aluminio para formar el marco. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de largo y ancho de la ventana para obtener el área máxima?

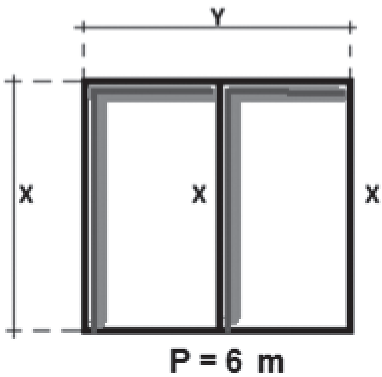
Primer paso: considerar dos ecuaciones, una de ellas para el perímetro de la ventana y otra para el área. Como se desea maximizar el área, esa ecuación es la que debe derivarse, por lo tanto, de la ecuación del perímetro se despeja la variable “y”, sustituyéndola en la ecuación del área.

$$3x + 2y = 6$$

$$y = \frac{6-3x}{2}$$

Ecuación del perímetro

$$y = 3 - 1.5x$$



Ecuación del área

$$A = x(y)$$

$$A = x(3 - 1.5x)$$

Se quiere el área máxima, se deriva A y posteriormente se iguala a cero para maximizar.

$$A = 3x - 1.5x^2$$

$$A' = 3 - 3x$$

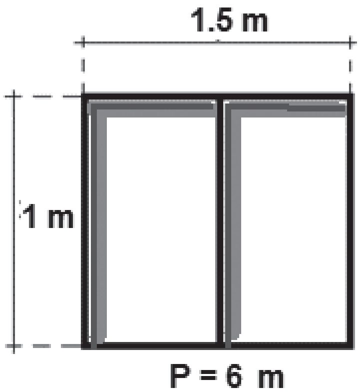
$$0 = 3 - 3x$$

$$x = \frac{3}{3} = 1m$$

$$y = 3 - 1.5x$$

$$y = 3 - (1.5)(1)$$

$$y = 1.5m$$



Área máxima:

$$A\max = (x)(y)$$

$$A\max = 1(1.5) = 1.5m^2$$

Perímetro mínimo

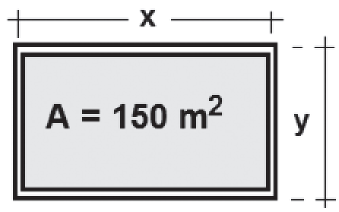
Se piensa colocar un pasto sintético para juegos infantiles y a su alrededor un cordón de concreto. El comité municipal donó 150 m2 de pasto, pero los padres de familia construirán el cordón. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de largo y ancho para que se construya la **mínima** cantidad de cordón de concreto para la superficie de pasto donada?

La ecuación del área para el pasto es:

$A = x(y)$

$xy = 150$

$y = \frac{150}{x}$



De esta ecuación se despejó la variable "***y***" para sustituirse en la ecuación del perímetro, que es la que debe minimizarse y por lo tanto derivarse.

$P = 2x + 2y$

$P = 2x + 2\left(\frac{150}{x}\right)$

$P = 2x + 300x^{-1}$

$P' = 2 - 300x^{-2}$

$P' = 2 - \frac{300}{x^2}$

La derivada se iguala a cero y se resuelve para x, al hacerlo estamos encontrando los puntos críticos (máximo y mínimo para la función).

$P' = 2 - \frac{300}{x^2}$

$0 = 2 - \frac{300}{x^2}$

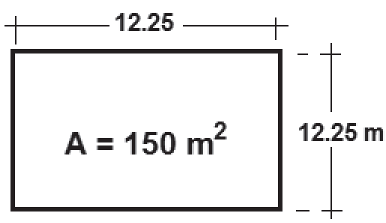
$\frac{300}{x^2} = 2$

$2x^2 = 300$

$x^2 = 150$

$x = \sqrt{150} = 12.25$

$y = \frac{150}{x} = \frac{150}{12.25} = 12.25$



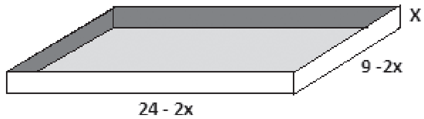
Se puede concluir (para este caso), que el largo y el ancho miden lo mismo. Es un cuadrado de 12.25 m de lado, con un perímetro de 49 m. (12.25 x 4), por lo que se requiere de 49 m de cimiento.

1 ACTIVIDAD

Resuelve los siguientes problemas de optimización.

Responde...

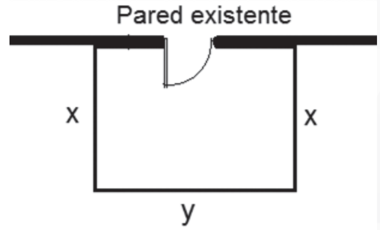
1. Se desea construir una caja rectangular con una pieza de cartón de 24 pulgadas de largo por 9 pulgadas de ancho, cortando cuadrados idénticos en las cuatro esquinas y doblando los lados. Encuentra las dimensiones de la caja de máximo volumen.



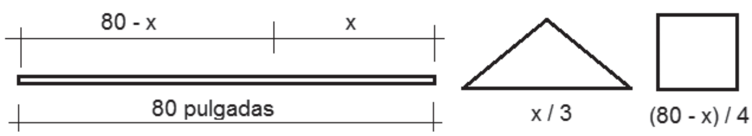
2. Se planea construir dos corrales adyacentes, idénticos, con 80 m de tela de alambre, ¿Cuáles deben ser las dimensiones del cercado total para que sea máxima el área?

3. Determina el producto máximo que se puede obtener con dos números enteros positivos cuya suma sea 100.

4. Una empresa donó 400 m2 de concreto para realizar un piso, en donde se colocará equipo de gimnasio para sus empleados. Se dispone de una pared con su puerta de acceso, por lo que se deberá realizar las tres paredes faltantes. Cada metro lineal de pared tendrá un costo de 1,200 pesos. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de las paredes para que se gaste la menor cantidad en su construcción, aprovechando los 400 m2 de piso?, ¿Cuál es el costo de construir las tres paredes?

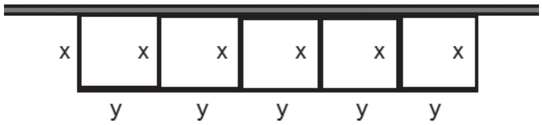


5. Un herrero quiere formar un triángulo equilátero de altura 5 pulgadas y un cuadrado, para lo cual cuenta con un trozo de solera de 80 pulgadas de longitud. ¿Dónde deberá hacer el corte el herrero en la solera para que se obtenga el área máxima en ambas figuras? ¿Qué área se obtiene en cada una de ellas?



6. ¿Cuál es el área máxima que se puede obtener de una hoja rectangular que debe tener un perímetro 600 cm?

7. Se colocará una serie de 5 corrales para gallinas aprovechando una barda existente. Todos los corrales serán idénticos y adyacentes, disponiéndose de 50 m lineales de alambre para el cercado (perímetro = 50 m), como se observa en la figura. ¿Cuál es el área máxima de cada corral?

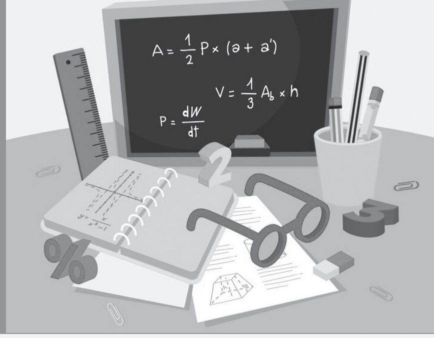


8. ¿Cuál es el rectángulo de máxima área que se puede obtener en un semicírculo cuyo radio mide 16 m?

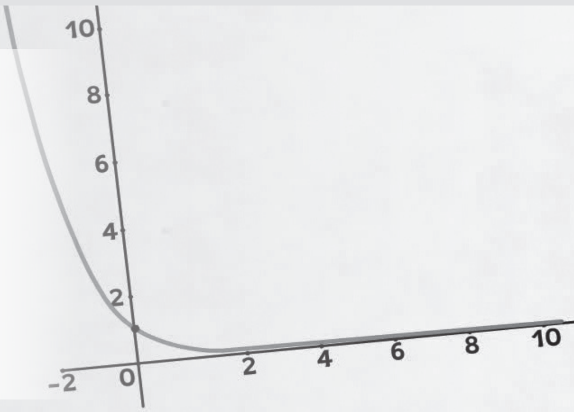
9. Un campo infantil para juegos va a ser cercado en sus cuatro lados. El material se vende por metro lineal y se colocará de dos tipos. El costo del material que se colocará enfrente y detrás cuesta \$50 metro lineal y el de los laterales \$40 metro lineal. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del campo de mayor área posible que puede ser cercado con un costo de \$5400 para la cerca?

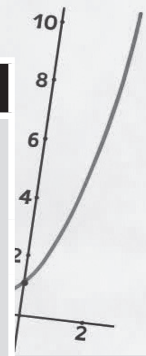
10. Determina el área máxima inscrita posible de un rectángulo limitado por los ejes cartesianos y la recta $y = 40 - x$

PROGRESIÓN 12



Examina la gráfica de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales para describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que la función exponencial y logarítmica de base "a" sean funciones inversas entre sí.





CATEGORÍAS

C2. Procesos de intuición y razonamiento
C3. Solución de problemas y modelación.

SUBCATEGORÍAS

SC2.1. Capacidad para observar y conjeturar
SC2.2. Pensamiento intuitivo
SC2.3. Pensamiento formal
SC3.1. Uso de modelos
SC3.2. Construcción de modelos

METAS DE APRENDIZAJE

M6. Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.

M9. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.

Contenidos específicos de la progresión

12.1. Graficas de funciones exponenciales.
   12.1.1. Función exponencial de base e.
12.2. Graficas de funciones logarítmicas.
12.3. Aplicaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas.

Descripción de la progresión:

En la siguiente progresión se analizan las funciones trascendentes, en específico las funciones exponenciales y logarítmicas, desarrollando sus gráficas y observando las características principales que las identifican, tales como si son crecientes o decrecientes, dominio y rango, etc. Para finalmente llegar a la conclusión de que ambas funciones son inversas entre sí.

Función exponencial

Las funciones exponenciales desempeñan un papel muy importante en varios aspectos de la vida cotidiana: en demografía, con el crecimiento poblacional; en biología con el desarrollo de bacterias o propagación de enfermedades; en las finanzas se estudian los fenómenos de interés o capital, etc.

Veamos un ejemplo donde se aplica la función exponencial.

Se estima que la población de una ciudad aumenta un 3.5% cada año. La población hoy en día es de 15 mil habitantes. ¿Cuál será la población en 10 años?, ¿cómo se representa el gráfico del aumento de la población?

Definimos como:

- y a la población de la ciudad.
- x al número de años a partir del presente.
- k a la población inicial de 15 mil habitantes.

Finalmente debemos encontrar qué es la base a.

Sabemos que la población aumenta un 3.5% cada año. Para utilizar el porcentaje tenemos que cambiarlo a decimales: 3.5% es equivalente a 0.035. Entonces cada año, la población crece un 3.5% de k, o $0.035k$.

Para encontrar la población total del próximo año, debemos sumar la población actual al aumento en la población. k + o $0.035k = 1.035k$.

Entonces la población debe ser multiplicada por un factor de cada año. Esto significa que la base exponencial es a= $1.035k$.

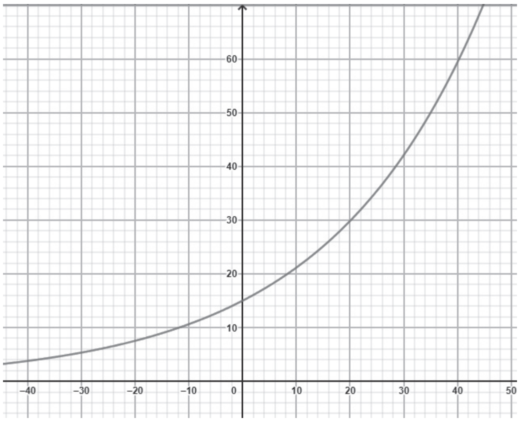
$$y = k \cdot (a)^x$$

La fórmula se describe como $y = 15 \cdot (1.035)^x$ en miles de habitantes

Tabla de valores

x	y
0	15
2	16.0
4	17.2
6	18.4
8	19.7
10	21.1

Gráfico



Observa que aparecen valores negativos de en la gráfica, el tiempo negativo puede representar el tiempo pasado. Por ejemplo, $x = -4$ en este problema representa la población de hace 4 años.

Entonces, ¿cuál será la población de la ciudad en 10 años? Para encontrar ese número, agregamos $x = 10$ a la ecuación y obtenemos: $y = 15 \cdot (1.035)^{10} = 21.1$ miles de personas.

Función exponencial

Una función exponencial de base se representa de la forma:

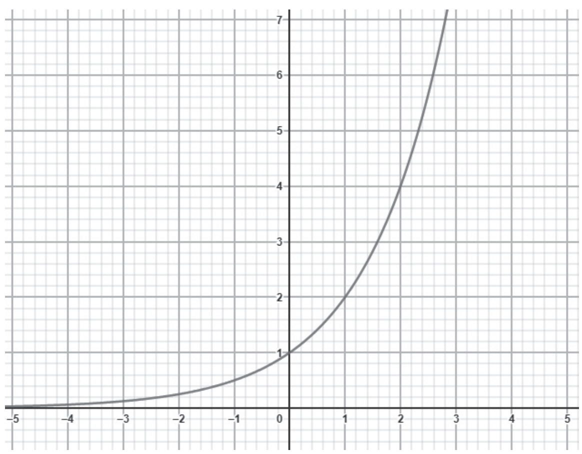
$$f(x) = a^x$$

Donde es la base de la función y un valor constante donde $a > 0$, $a \neq 1$,

Si $f(x) = a^x$ y $a > 1$

- La función es creciente
- Intersecta a y en el punto (0,1)
- El dominio $x \in (-\infty, \infty)$
- El rango es el intervalo de $y \in (0, \infty)$
- Su asíntota es el eje x con la ecuación $y = 0$.

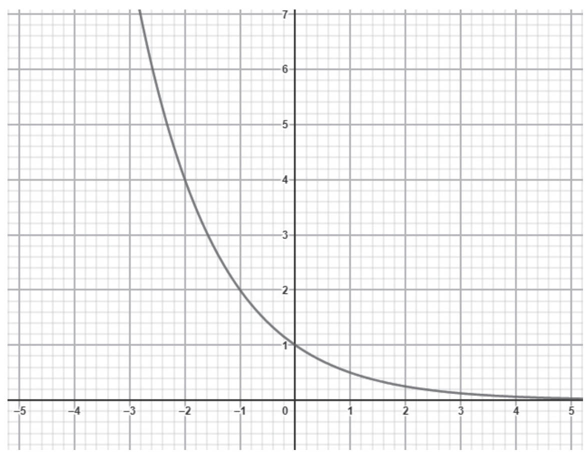
Ejemplo: $f(x) = 2^x$



Si $f(x) = a^x$ y $0 < a < 1$

- La función es decreciente
- Intersecta a y en el punto (0,1)
- El dominio $x \in (-\infty, \infty)$
- El rango es el intervalo de $y \in (0, \infty)$
- Su asíntota es el eje x con la ecuación $y = 0$.

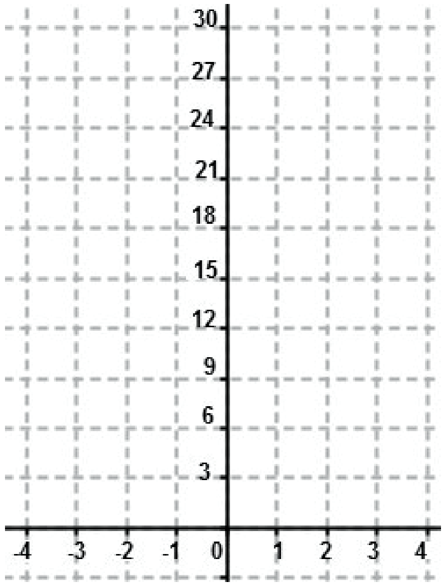
Ejemplo: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



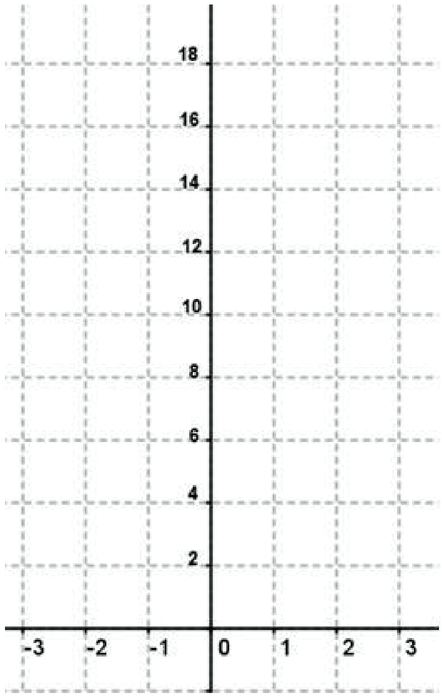
1 ACTIVIDAD

Traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones en un mismo sistema de coordenadas, indica si son crecientes o decrecientes. (Usa diferente color para cada gráfica).

x	$f(x) = 4^x$	$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		



x	$f(x) = 3^x$	$f(x) = 3^{x+1}$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		



Función exponencial natural

Estas funciones expresan un valor irracional llamado Número Euler, identificado mediante la letra e, el cual se utiliza para representar funciones exponenciales, se expresa $f(x) = e^x$ llamada función exponencial natural.

El número e se define como el número al cual tiende la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando $n \to \infty$.

En cálculo se expresa mediante la notación de límite como $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (Sullivan, 1997).

En la siguiente tabla se muestra lo que ocurre con la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando adquiere valores de n cada vez mayores.

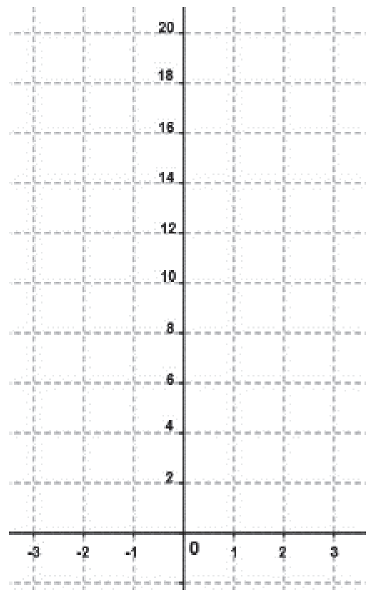
La función exponencial natural, también la podemos expresar como $f(x) = Ae^{ax}$ y es creciente o decreciente dependiendo del valor del exponente a. Es creciente si a es positivo; es decreciente si a es negativo.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2.59374246
100	2.704813829
1000	2.716923932
10,000	2.718145926
100,000	2.718268237
$1\text{x}10^9$	2.718281827

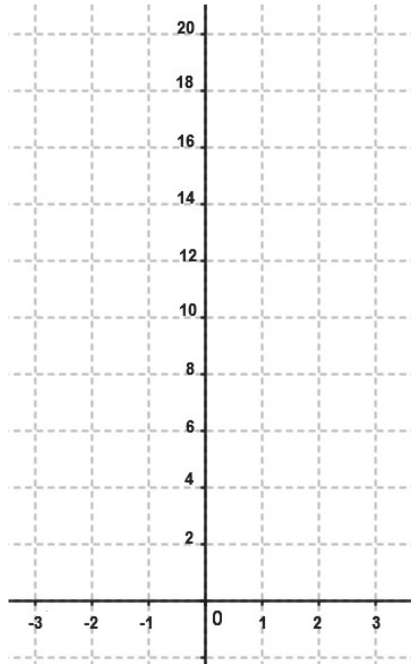
2 ACTIVIDAD

Traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones en un mismo sistema de coordenadas, indica si son crecientes o decrecientes. (Usa diferente color para cada gráfica).

x	$f(x) = e^x$	$f(x) = e^{-x}$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		



x	$f(x)=2e^{\frac{x}{2}}$	$f(x)=2e^{-\frac{x}{2}}$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		



Resolución de problemas

EJEMPLO 1. Armando realiza una inversión de $50,000 en el banco, con un interés compuesto anual de 5%. ¿Cuánto dinero tendrá Armando en el banco en 5 años? ¿Y en 15 años?

Solución:

Consideremos:

- x = Tiempo en años
- y = Cantidad de dinero en la cuenta a través del tiempo
- k = La inversión inicial de Armando

Para encontrar nos dicen que el interés compuesto anual es del 5% que representa 0.05 en decimal. Cada año se genera un interés de 0.05k . Por lo que para el próximo año es $k+0.05k=k(1+0.05)$ el factor es de $a=1.05$ cada año.

De la ecuación $y=k\cdot(a)^x$ queda expresada $y=50{,}000\cdot(1.05)^x$.

Para calcular el monto a los 5 años asignamos $x=5$.

$$y=50{,}000\cdot(1.05)^5=\$63{,}814.07$$

Para calcular el monto a los 15 años asignamos $x=15$.

$$y=50{,}000\cdot(1.05)^{15}=\$103{,}946.40$$

EJEMPLO 2. Una colonia de bacterias se coloca en un cultivo adecuado para su crecimiento, la función $n(t) = n_0 e^{rt}$, nos dice cómo crece su número. Si inicialmente la colonia está compuesta por 2000 bacterias y su tasa de crecimiento es del 0.183%. ¿Cuántas habrá a los 10 minutos?

Consideramos:

- Cantidad de bacterias inicial es $n_0 = 2000$
- La tasa de crecimiento es $r = 0.183$
- El tiempo $t = 10$ min

A los 10 minutos habrá 12,468 bacterias

Aplicamos los datos:

$n(t) = n_0 e^{rt}$
$n(10) = 2000 \,.\, e(0.183)(10)$
$n(10) = 12{,}467.77$
$n(10) = 12{,}468$

3 ACTIVIDAD

Resuelve los siguientes problemas que involucran funciones exponenciales.

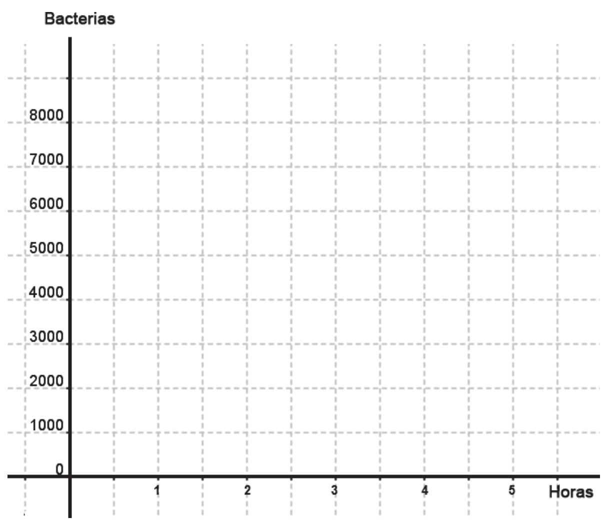
Responde...

1. Se estudia el crecimiento de una población de insectos que es causa de múltiples problemas. Con el fin de determinar la rapidez de reproducción de los insectos, se cuenta inicialmente con una población de 200 insectos. Se observa que cada hora se duplica la cantidad existente. Lo que se deduce que el modelo exponencial que describe el crecimiento es:

$$\mathbf{y} = (200)2^x$$

   a) ¿Cuántos insectos habrá a las 3 horas?
   b) ¿Cuántos insectos habrá a las 5 horas?
   c) Tabula los siguientes datos y traza la gráfica

X (Horas)	Y (Insectos)



2. Un banco invita a los clientes a invertir, para lo cual ofrece una tasa de interés de 2.6% anual, basada en un interés compuesto. Determina la ecuación que permite calcular el interés y construye una gráfica que muestre el comportamiento de una inversión inicial de $5,000 cuando ha transcurrido un tiempo de 0 a 4 años.

   Para la expresión $A = Pe^{rt}$ donde:

   - P = capital inicial
   - r = tasa de interés
   - t = tiempo en años
   - A = Saldo final

x	y
0	
1	
2	
3	
4	

3. Los médicos utilizan yodo radiactivo como trazador en el diagnóstico de ciertos desórdenes de la glándula tiroides. Este tipo de yodo se desintegra de forma que la masa que queda después un tiempo t de días está dada por la función $m(t) = 6e^{-0.087t}$,donde m representa la masa en gramos.

   a) Determina la masa en un tiempo $t = 0$.

   b) ¿Cuánta masa queda después de 20 días?

4. La población de cierta ciudad era de 480,000 en el año 2000 y crece con una tasa relativa de 4.5% anual.

   a) Determina la fórmula del crecimiento de la población en un tiempo t de años.

   b) Estima la población en 2030.

Función logarítmica

Una función logarítmica de base a se representa de la forma $f(x) = \log_a x$ donde a es la base de la función y un valor constante, siendo $a > 0$, $a \neq 1$.

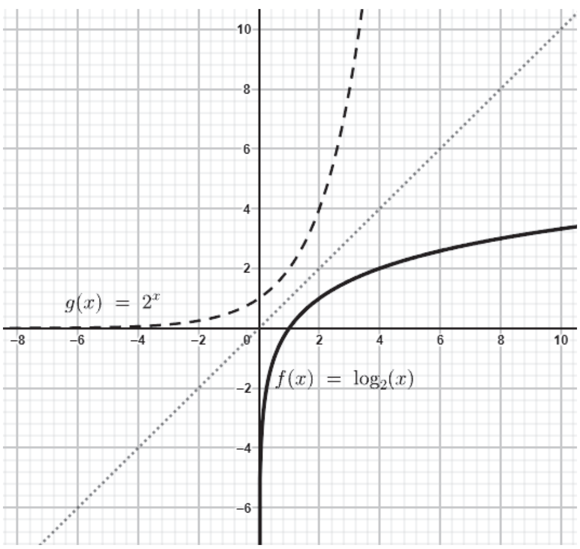
La función logarítmica es inversa a la función exponencial dado que:

Si $\log_a x = y$ entonces $a^y = x$

Ejemplo: Si $\log_3 x = 2$ entonces $3^2 = x$ por lo tanto $x = 9$ ya que $3^2 = 9$.

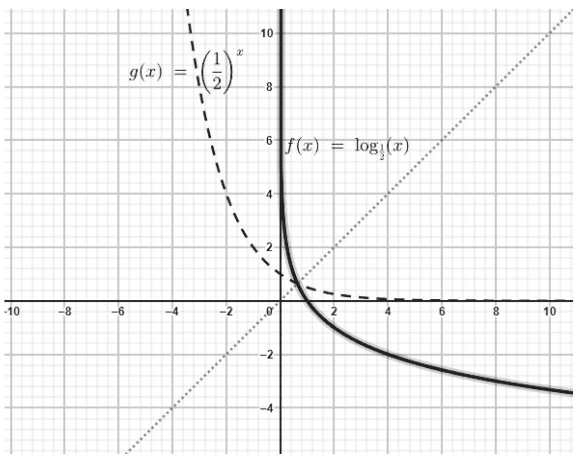
Si $f(x) = \log_a x$ y $a > 1$

- La función es creciente
- Intersecta a y en el punto $(1,0)$
- El dominio $x \in (0, \infty)$
- El rango es el intervalo de $y \in (-\infty, \infty)$
- Su asíntota es el eje y con la ecuación $x = 0$
- Ejemplo: $f(x) = \log_2 x$



Si $f(x) = \log_a x$ y 0 < a < 1

- La función es decreciente
- Intersecta a y en el punto $(1,0)$
- El dominio $x \in (0, \infty)$
- El rango es el intervalo de $y \in (-\infty, \infty)$
- Su asíntota es el eje y con la ecuación $x = 0$
- Ejemplo: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



4 **ACTIVIDAD**

De exponencial a logaritmo y logaritmo a exponencial.
Ejemplo: $\log_2 16 = 4$ entonces $2^4 = 16$

Responde...

1. Cambia la expresión logaritmo por una expresión equivalente con exponencial.

a) $\log_2 8 = 3$ b) $\log_3 9 = 2$ c) $\log_3 81 = 4$ d) $\log_{10} 1000 = 3$

e) $\log_5 125 = 3$ f) $\log_4 1024 = 5$ g) $\log_6 36 = 2$ h) $\log_3 27 = 3$

i) $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$ j) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$

2. Cambia la expresión exponencial por una expresión equivalente con logaritmo.

Ejemplo: $4^3 = 64$ entonces $\log_4 64 = 3$

a) $64 = 8^2$ b) $9 = 3^2$ c) $343 = 7^3$ d) $16 = 4^2$

e) $9 = 81^{\frac{1}{2}}$ f) $n = 10^m$ g) $10^2 = 100$ h) $5^3 = 125$

i) $729 = 9^3$ j) $x = 10^3$

3. Usa la definición de logaritmo para encontrar el valor de x :

Ejemplo: $\log_3 x = 5$

$3^5 = x$

$x = 243$

a) $\log_2 x = 5$ b) $\log_4 16 = x$ c) $\log_x 25 = 2$ d) $\log_x 16 = 4$

e) $\log_3 x = 4$ f) $\log_2 256 = x$ g) $\log_x 8 = \frac{3}{2}$ $\log_5 \frac{1}{125} = x$

i) $\log_3 \frac{1}{27} = x$ j) $\log_{10} x = 3$

Cambio de base para logaritmos

Para determinar el logaritmo puede utilizarse la siguiente expresión y resolverse con calculadora:

Sea $\log_b x = y$, entonces: $y = \dfrac{\log x}{\log b}$

Ejemplo: $\log_2 42 = y$ (¿a qué exponente debe elevarse la base 2 para obtener 42?)

$$y = \frac{\log x}{\log b} = \frac{\log 42}{\log 2} = 5.3923...$$

Ya que, $2^{5.3923...} = 42$

1. Determina el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 64 =$ b) $\log_4 25 =$ c) $\log_5 25 =$ d) $\log_3 15 =$

e) $\log_3 243 =$ f) $\log_6 250 =$ g) $\log_9 900 =$ h) $\log_5 200 =$

Logaritmo base 10 y logaritmo natural

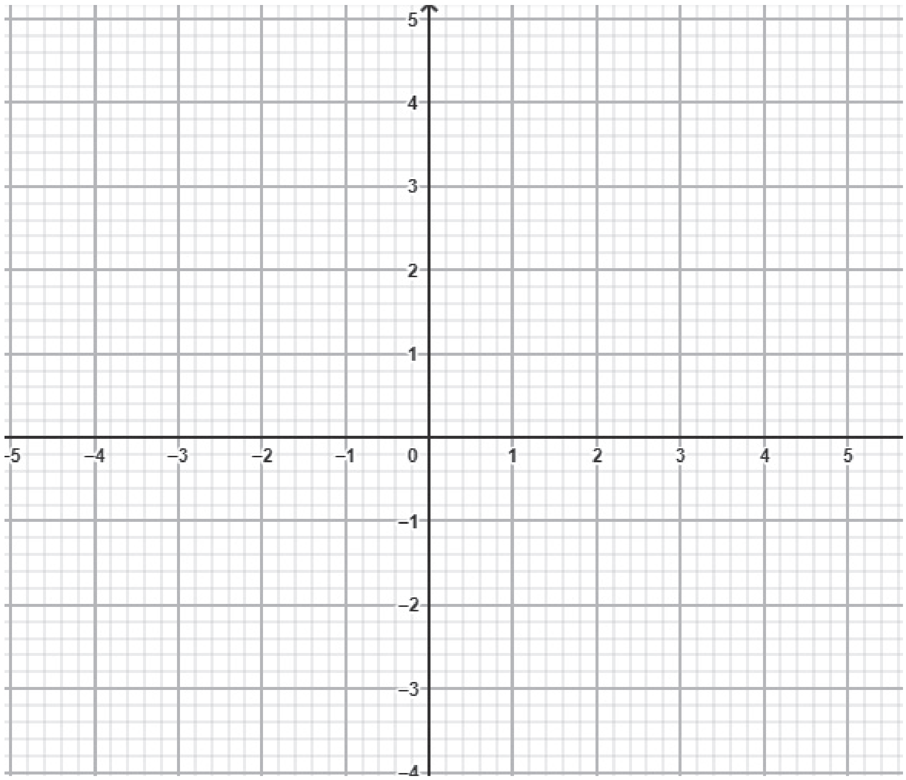
Existen dos tipos de logaritmos que son muy usados en la práctica, los logaritmos comunes de base 10 y los naturales de base e, se les identifica con una notación particular.

Logaritmo base 10	Logaritmo natural
$\log x = \log_{10} x$	$\mathbf{\ln x = \log_e x}$
Ejemplo: $\log 5 = \log_{10} 5$ $0.6989 = 0.6989$	**Ejemplo:** $\ln 5 = \log_e 5$ $1.6094 = 1.6094$

5

ACTIVIDAD

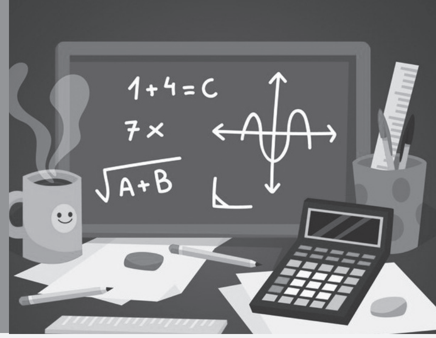
Determina las gráficas de logaritmo natural y exponencial natural de acuerdo a los datos indicados en la tabla.



$y = \ln x$	
x	y
0.2	
0.6	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

$y = e^{x}$	
x	y
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

PROGRESIÓN 13



Analiza y describe un fenómeno en el que la periodicidad sea un constituyente fundamental a través del estudio de propiedades básicas de funciones trigonométricas.

CATEGORÍAS

C2. Procesos de intuición y razonamiento
C3. Solución de problemas y modelación.

SUBCATEGORÍAS

SC2.1. Capacidad para observar y conjeturar
SC2.2. Pensamiento intuitivo
SC3.2. Construcción de modelos

METAS DE APRENDIZAJE

M5. Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.

M9. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.

Contenidos específicos de la progresión

13.1. Funciones trigonométricas: El circulo unitario.
13.2. Conversión de grados a radianes.
13.3. Gráficas de las funciones Seno y Coseno.

Descripción de la progresión:

En esta progresión se realizará el análisis de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, considerando los sistemas de medición de ángulos (grados y radianes) necesarios para el trazo de su gráfica, los valores y signos correspondientes de estas funciones trigonométricas de acuerdo al plano cartesiano y el círculo unitario, sus características gráficas de amplitud, periodo, dominio y rango, así como sus aplicaciones en situaciones reales.

Funciones trigonométricas

La Trigonometría como rama de las Matemáticas estudia la relación entre lados y ángulos de un triángulo rectángulo.

Las funciones trigonométricas son funciones muy utilizadas en las Ciencias Naturales para analizar fenómenos periódicos tales como: movimiento ondulatorio, corriente eléctrica alterna, cuerdas vibrantes, ciclos biológicos, etc.

En aplicaciones de las funciones trigonométricas relacionadas con fenómenos que se repiten periódicamente, se requiere que sus dominios sean conjuntos de números reales.

Para estudiar el comportamiento de las funciones trigonométricas debemos conocer que son los ángulos y su sistema de medición. Existen varias unidades de medida de los ángulos entre las más utilizadas están el sistema sexagesimal y el sistema cíclico o circular.

Ángulos y su sistema de medición

Se denomina ángulo a la sección del plano que queda comprendida entre dos semirrectas que se originan en un mismo punto, y están colocadas en distintas direcciones. El punto en que se inician las semirrectas se denomina vértice del ángulo; en tanto que cada una de las semirrectas que lo delimitan, se denominan lados del ángulo. *(Modulo 5. Trigonometría, 2014).*

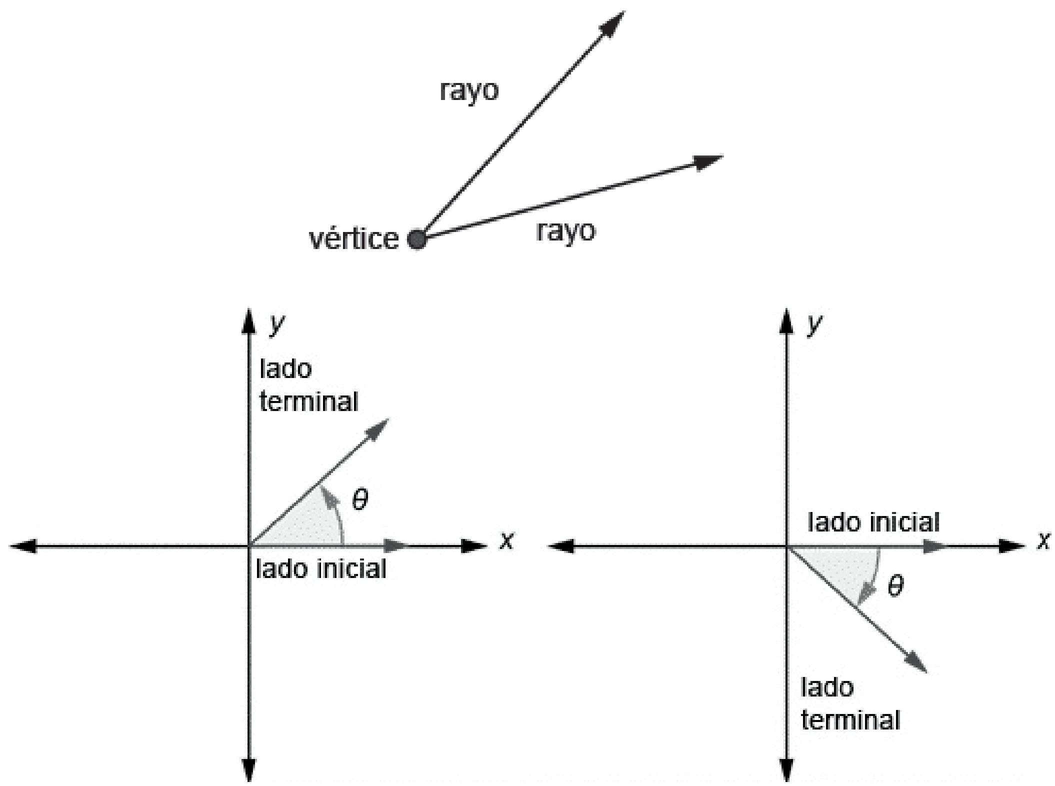


Fig. 1. Ángulos

El sistema para la medición de ángulos que se emplea normalmente es el sistema sexagesimal que divide a una circunferencia en 360 partes iguales llamados grados, a su vez cada grado se divide en 60 partes llamados minutos y un minuto se divide en 60 partes llamados segundos.

1° (grado) = 60'(minutos)
1' (minuto) = 60" (segundos)

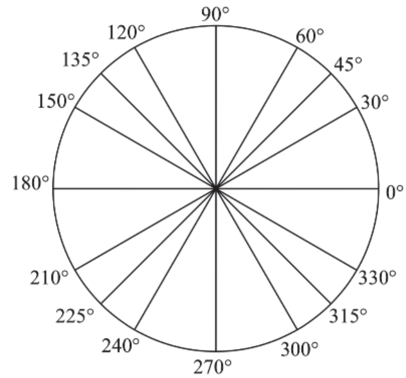


Fig. 2. Grados

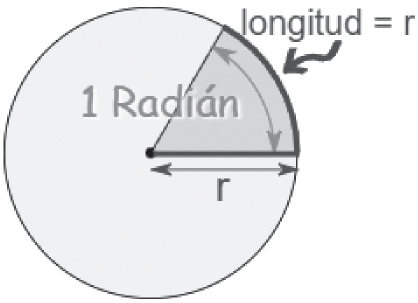


Fig. 3. Radián

El sistema cíclico o circular utiliza como unidad fundamental el radián. Que es un ángulo central formado por un arco igual a la longitud del radio del círculo.
1 rad = 57.29˚   2π rad = 360˚

Convertir de grados a radianes y viceversa

Considerando que en 360° = 2πrad y por lo tanto 180°= πrad para convertir de grados a radianes y de radianes a grados utilizamos las siguientes equivalencias.

De grados a radianes	De radianes a grados
$grados\left(\frac{\pi}{180°}\right)$	$radianes\left(\frac{180°}{\pi}\right)$

1 **ACTIVIDAD**

Convierte los grados a radianes y los radianes en grados de los siguientes ejercicios.

Responde...

Grados a Radianes		Radianes a Grados	
a)	30˚=	l)	4 rad =
b)	45˚=	m)	2.5 rad =
c)	90˚=	n)	3 rad =
d)	120˚=	o)	$\frac{2}{3}\pi$ rad =
e)	210 ˚=	p)	π rad =
f)	270˚=	q)	$7/6\,\pi$ rad =
g)	150˚=	r)	$5/6\,\pi$ rad =
h)	300˚=	s)	$1/4\,\pi$ rad =
i)	60˚=	t)	2π rad =
j)	180˚=		
k)	1.8 rad =		

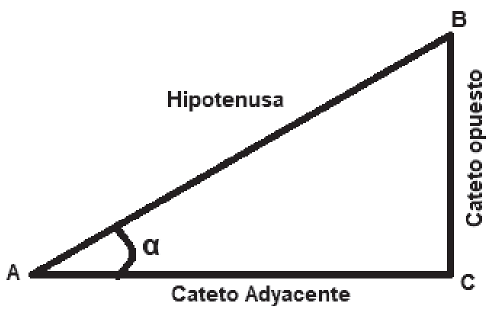


Fig. 4. Triángulo

Básicas

$$seno\,\alpha = \frac{\text{Opuesto}}{Hipotenusa}$$

$$Coseno\,\alpha = \frac{Adyacente}{Hipotenusa}$$

$$Tangente\,\alpha = \frac{Opuesto}{Adyacente}$$

Recíprocas

$$Co\sec ante\,\alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{Opuesto}$$

$$\sec ante\,\alpha = \frac{Hipotenusa}{Adyacente}$$

$$Co\tan gente\,\alpha = \frac{Adyacente}{Opuesto}$$

Funciones trigonométricas en el plano cartesiano

Un triángulo rectángulo ubicado en el plano cartesiano, de manera que sus catetos coincidan con el eje horizontal, las funciones trigonométricas tendrán signos dependiendo del cuadrante en el cual se encuentra el triángulo.

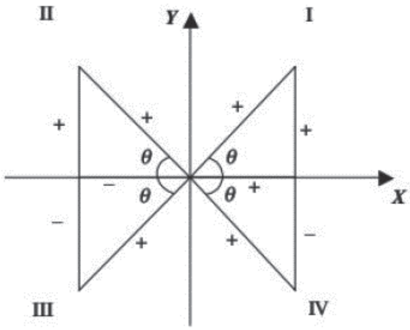


Fig. 5. Funciones en el plano

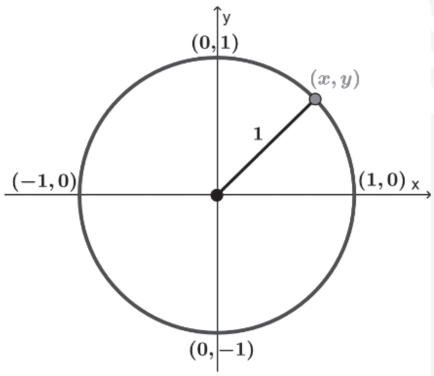
Cuadrante	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
I	+	+	+	+
II	+	–	–	–
III	–	–	+	+
IV	–	+	–	–

Circulo unitario

El círculo unitario trigonométrico es un círculo con radio = 1, centrado en el eje del plano y está representado por la ecuación: $x^2 + y^2 = 1$

Es importante recordar los signos de las diferentes funciones en cada cuadrante y para determinarlos se toma en cuenta lo siguiente:

- Todos los segmentos perpendiculares al eje de las x son positivos si están arriba de él y negativo si están abajo.
- Todos los segmentos perpendiculares al eje de las y son positivos si están a la derecha de él y negativos si están por la izquierda.



$$x^2 + y^2 = 1$$

Fig. 6. Circulo unitario

Por lo que las funciones respecto a los cuadrantes quedan así:

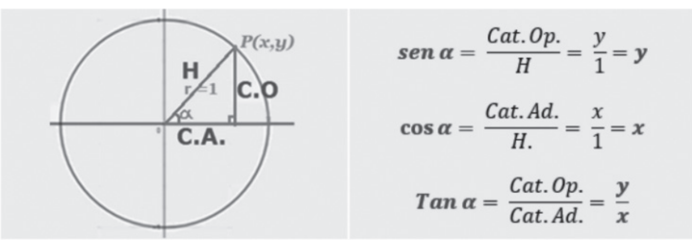


Fig. 7. Funciones

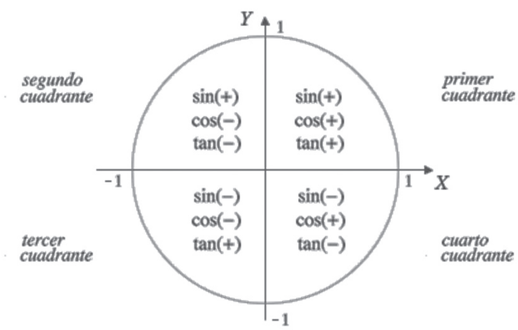


Fig. 8. Signos de las funciones

Valores de ángulos notables

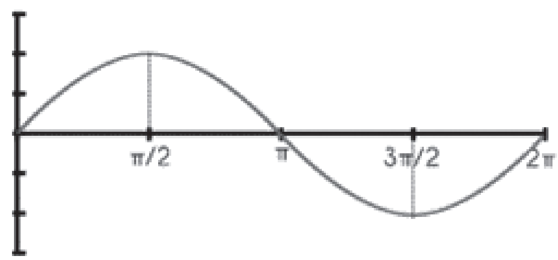
A los ángulos de 30º, 45º y 60º (sus equivalentes en radianes $\pi/6$ rad, $\pi/4$ rad y $\pi/3$ rad) se les conoce como ángulos notables. Se llaman así porque aparecen muy a menudo en nuestra vida cotidiana, y resulta de gran utilidad aprender de memoria los valores de sus razones trigonométricas. Para encontrar los valores de los lados se traza el triángulo equilátero ABC de 2 unidades por lado, se bisecta el ángulo C para formar 2 triángulos rectángulos iguales, ya que la suma de los ángulos internos es igual a 180º, sus ángulos miden 60º se obtienen los siguientes valores:

RADIANES	GRADOS	SENO	COSENO	TANGENTE
0	0°	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Gráficas de las funciones trigonométricas

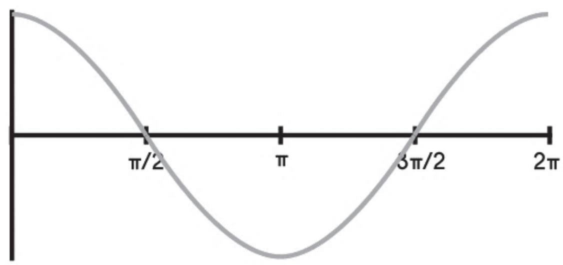
- Gráfica de la función $y = sen\,(x)$

  - Tiene un periodo igual a 2π rad.
  - Es creciente en el primero y cuarto cuadrante, es decreciente en el segundo y tercer cuadrante.
  - La función es positiva en el primer y segundo cuadrante, negativa en el tercero y cuarto cuadrante
  - Intersecta el eje x en π rad.
  - Su dominio es de $(-\infty, \infty)$
  - Su rango es de [-1,1]



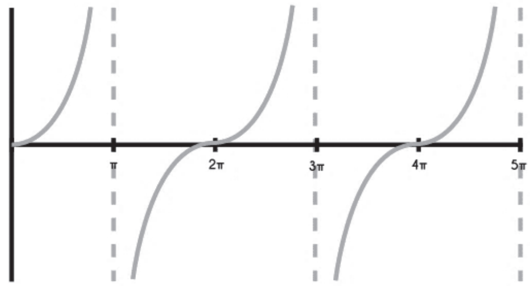
- Gráfica de la función $y = cos\,(x)$

  - Tiene un periodo igual a 2π rad
  - Es decreciente en el primer y segundo cuadrante, es creciente en el tercer y cuarto cuadrante
  - La función es positiva en el primer y cuarto cuadrante, negativa en el segundo y tercero cuadrante
  - Intersecta el eje x en $1/2\pi$ rad y $3/2\pi$
  - Su dominio es de $(-\infty, \infty)$
  - Su rango es de [-1,1]



➢ Gráfica de la función $y = tan\ (x)$

- Tiene un periodo de π rad
- La función es positiva en el primer y tercer cuadrante, negativa en el segundo y cuarto cuadrante
- Intersecta el eje x en π rad y 2π
- Con asíntotas verticales en x tal que $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ con $n \in Z$
- Su rango es de $(-\infty, \infty)$



2 ACTIVIDAD

Completa cada una de las tablas, determinando los valores de los ángulos expresados en grados y radianes y realiza la gráfica de las funciones trigonométricas en hoja cuadriculada.

Responde...

A) $y = sen\ (x)$

x	Grados	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
	Radianes													
y														

B) $y = cos\ (x)$

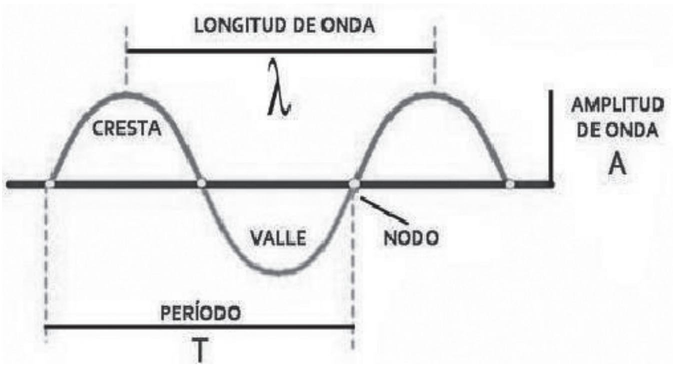
x	Grados	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
	Radianes													
y														

C) $y = tan\ (x)$

x	Grados	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
	Radianes													
y														

Elementos de la onda

- **Cresta:** Es la parte más elevada de una onda.
- **Valle**: Es la parte más baja de una onda.
- **Amplitud:** (A) Es la distancia desde el centro del movimiento hasta la cresta o valle.
- **Periodo** (T)**:** Es el tiempo trascurrido entre dos puntos equivalentes de la oscilación. Un ciclo completo.
- **Longitud de onda:** Es el periodo espacial de la misma, es decir, la distancia a la que se repite de cresta a cresta o de valle a valle.
- **Frecuencia** (f)**:** Es el número de ondas que sucede en unidad de tiempo. Inversa del periodo.



Considerando la función $y = a \text{ sen } kx$ o la función $y=a \cos kx$ donde $k > 0$ la amplitud y el periodo se determinan por medio de:

- **Amplitud** (A) = Es el valor absoluto de a. $A=|a|$
- **Periodo** (T) = Resulta al dividir 2π sobre k que es el valor al lado de la variable. $T = \frac{2\pi}{k}$
- **Frecuencia** (f) = las veces que se repite un ciclo en 2π y depende del valor de k. Es la Inversa del periodo $f = \frac{1}{T}$

Ejemplo: $y = -4sen3x \qquad a = -4 \qquad k = 3$

- **Amplitud** $(A) = (A) = |a| = |-4| = 4$
- **Periodo** (T) = $T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3}$
- **Frecuencia** (f) = $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi/3} = \frac{3}{2\pi}$

3 ACTIVIDAD

Determina la amplitud, periodo y frecuencia de las siguientes funciones, así como su gráfica.

Responde...

a) $y = sen\ 4x$

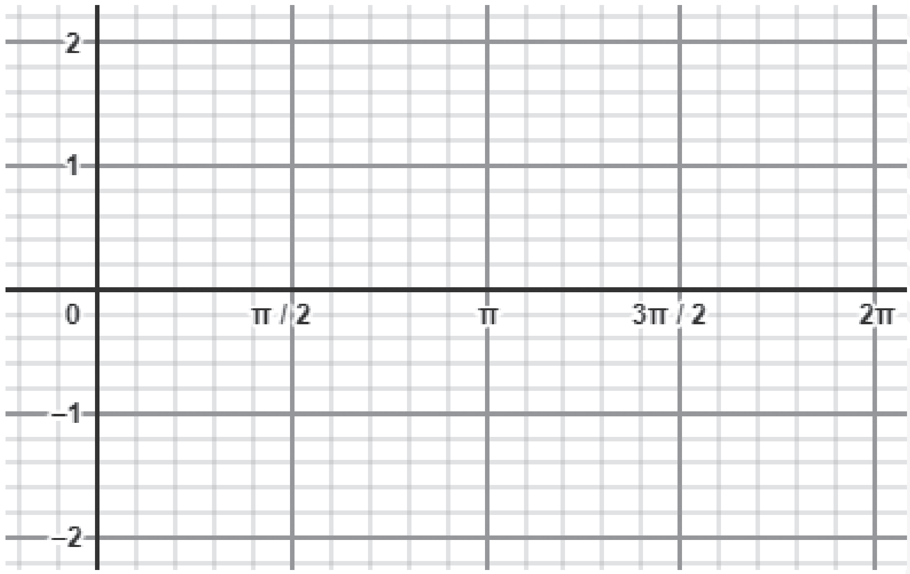
- Amplitud=
- Periodo=
- Frecuencia=

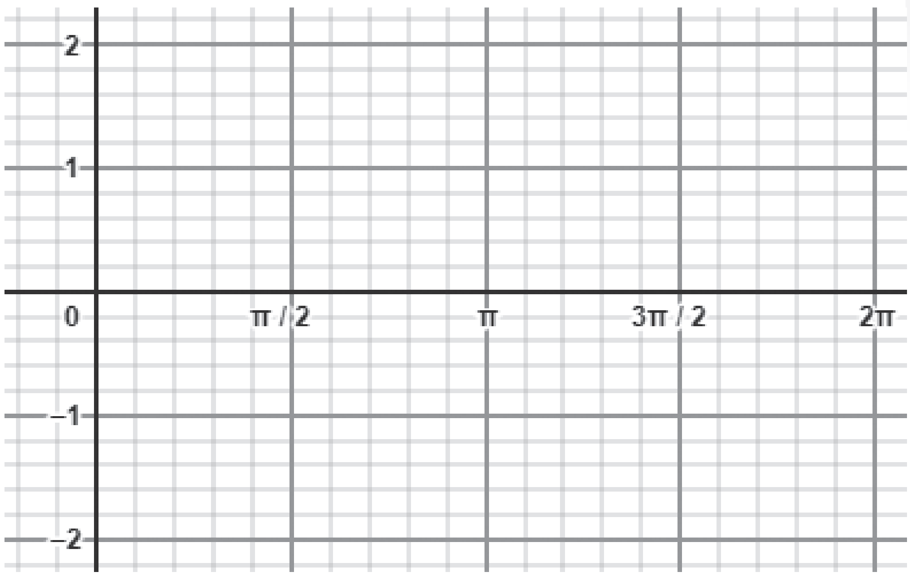
b) $y = 2\ cos\ 4x$

- Amplitud=
- Periodo=
- Frecuencia=

c) $y = 3\ sen\ 2x$

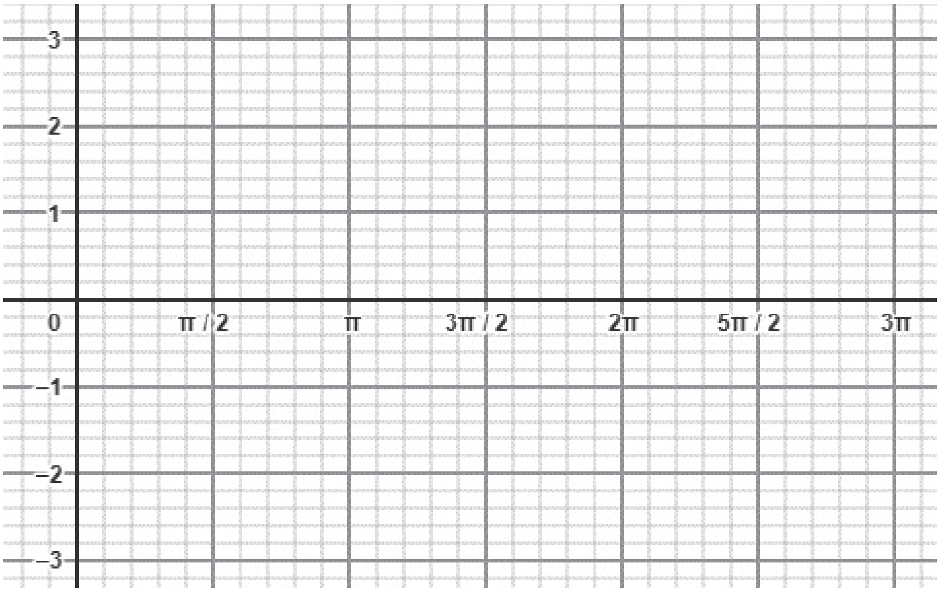
- Amplitud=
- Periodo=
- Frecuencia=





d) $y = \frac{1}{2} Cos \frac{3x}{4}$

- Amplitud=
- Periodo=
- Frecuencia=



d) $y = \frac{3}{4} Sen \frac{x}{2}$

- Amplitud=
- Periodo=
- Frecuencia=

PROGRESIÓN 14

Selecciona una problemática, situación o fenómeno tanto real como ficticio para modelarlo utilizando funciones derivables.

CATEGORÍAS

C2. Procesos de intuición y razonamiento
C3. Solución de problemas y modelación.
C4. Interacción y lenguaje matemático

SUBCATEGORÍAS

SC2.1. Capacidad para observar y conjeturar
SC2.3. Pensamiento formal
SC3.2. Construcción de modelos
SC4.2. Negociación de significados
SC4.3. Ambiente matemático de comunicación

METAS DE APRENDIZAJE

M7. Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.

M9. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.

M14. Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o evaluación.

Contenidos específicos de la progresión

14.1. Derivadas de las funciones exponenciales
14.2. Derivadas de funciones logarítmicas.
14.3. Derivadas de las funciones trigonométricas.
14.4. Aplicaciones de funciones trascendentes derivables.

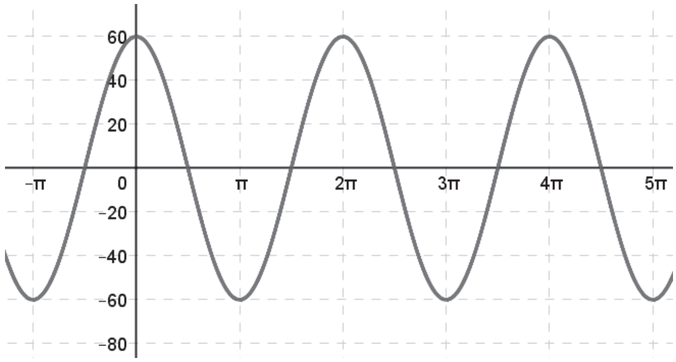
Descripción de la progresión:

A partir de una situación problemática relacionada con una función trascendente se introduce al estudio de la derivada, tanto de funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas. Las y los estudiantes pondrán en práctica las fórmulas de derivación ya anteriormente vistas, a la vez que utilizan nuevos conceptos como lo son las identidades trigonométricas.

Derivando una función trigonométrica

Antonio colocó un cuerpo metálico en el extremo de un resorte vertical y lo desplazó hacia abajo 60 cm, en relación a su posición de reposo, con la intención de estirar el resorte, soltándolo en el instante x = 0.

Se da cuenta que se realiza un movimiento armónico simple, es decir, realiza un movimiento periódico de vaivén en el que el cuerpo oscila de un lado a otro de su posición de equilibrio en intervalos de tiempo iguales, por lo que decide graficar el movimiento.



Determinó que la posición en el instante x puede ser modelada mediante la ecuación: $S(x)=60\ cos\ x$

Si se considera que la dirección hacia abajo es positiva, ¿cuál es la velocidad y la aceleración en el instante x?

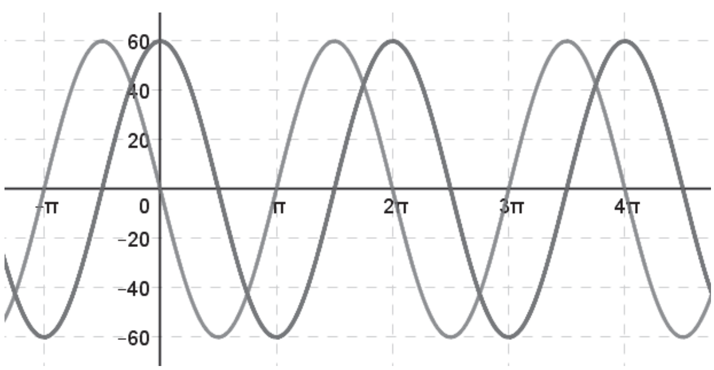
Por lo visto anteriormente, la velocidad en un instante x tiene que ver con la velocidad instantánea y por lo tanto, puede obtenerse derivando la expresión. La aceleración se obtiene con la segunda derivada.

Antes de responder a la pregunta planteada, primero veremos que las funciones trigonométricas pueden derivarse utilizando las fórmulas siguientes:

1. $Dx(senx) = \cos x$

2. $Dx(\cos x) = -senx$

De manera que la derivada de seno es coseno y la derivada de coseno es seno negativo.



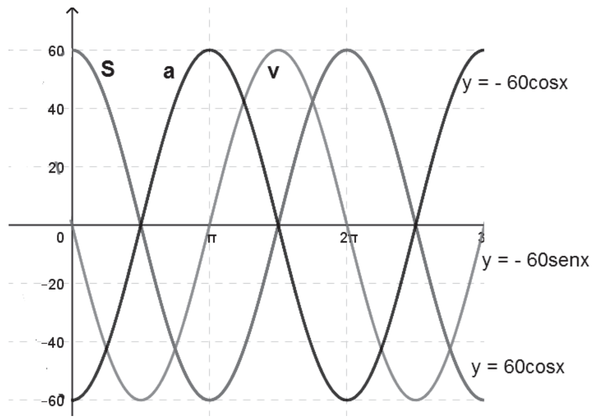
La rapidez o magnitud de la velocidad es $|v|=60|senx|$, que representa la derivada de $S(x)=60\ cos\ x$.
Esta velocidad será máxima cuando $|senx| = 1$ es decir, cuando $cos\ x = 0$.

El objeto se mueve con mayor rapidez cuando pasa por su posición de equilibrio $(S = 0)$. Su rapidez será cero cuando el tiempo $x = 0$, su punto más alto y bajo.

La aceleración se obtiene con la segunda derivada.
$(x)= 60\ cos\ x$
$S'(x)= - 60sen\ x$
$S''(x)= - 60\ cos\ x$

La aceleración será cero, cuando el tiempo $x = 0$, es decir $a=- 60\ cos\ x=0$

Tendrá su aceleración máxima en el punto más alto y más bajo.



1 ACTIVIDAD

Resuelve los siguiente problemas.

Responde...

1. Una banda elástica cuelga de un gancho, con una masa sujeta en su extremo inferior, cuando se tira de la masa hacia abajo y, luego se deja en libertad, vibra verticalmente en un movimiento armónico simple. Le ecuación del movimiento es $S=2\ cos\ x+3sen\ x$, donde S se mide en centímetros y x en segundos.
Si se toma la dirección positiva la correspondiente hacia abajo, encuentra la velocidad y la aceleración en el instante x.

2. Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa y nivelada, en un movimiento armónico simple. Si su ecuación de movimiento es $S(x)=8sen\ x$, donde S se mide en centímetros y x en segundos. Encuentra la velocidad y aceleración en el instante x.

Halle la posición, la velocidad y la aceleración de la masa en el instante $x = \frac{2\pi}{3}$

3. Un objeto de acero con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda sujeta al propio objeto. Si la cuerda forma un ángulo con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es:

$$F = \frac{0.22W}{0.22sen\,\theta + \cos\theta}$$

Encuentra la razón de cambio de F con respecto a θ (derivar la función F)

Además de las funciones trigonométricas, otras de las funciones trascendentes son las funciones logarítmicas y exponenciales, las cuales también pueden derivarse.

Fórmulas de derivación de funciones trascendentes (trigonométricas, exponenciales y logarítmicas).

1.- $Dx(senx) = \cos x$	**7.-** $Dx(\cos U) = -senU(DxU)$
2.- $Dx(\cos x) = -senx$	**8.-** $Dx(\ln x) = \frac{1}{x}$
3.- $Dx(\tan x) = \sec^2 x$	**9.-** $Dx(\ln U) = \frac{1}{U}DxU$
4.- $Dx(\cot x) = -\csc^2 x$	**10.-** $Dx(\log U) = \frac{1}{U}\log e(DxU)$
5.- $Dx(\sec x) = \sec x \tan x$	**11.-** $Dx(e^x) = e^x$
6.- $Dx(senU) = \cos U(DxU)$	**12.-** $Dx(e^U) = e^U(DxU)$

Ejemplos: Deriva las siguientes funciones trascendentes.

1. $Dx\left(\ln x^3\right)$ $y'=\frac{1}{x^3}Dx\left(x^3\right)=\frac{3x^2}{x^3}=\frac{3}{x}$	**2.** $Dx(sen3x)$ $y'=\cos 3xDx(3x)=\cos 3x(3)$ $y'=3\cos 3x$
3. $Dx\left(\ln 2x^3-3x^2+4\right)$ $y'=\frac{1}{2x^3-3x^2}Dx\left(2x^3-3x^2\right)$ $y'=\frac{6x^2-6x}{2x^3-3x^2}$	**4.** $Dx\left(sen\,\frac{2}{x}\right)$ $y'=\cos\frac{2}{x}\left(Dx2x^{-1}\right)=\cos\frac{2}{x}\left(-2x^{-2}\right)$ $y'=-\frac{2}{x^2}\cos\frac{2}{x}$
5. $Dx\left(e^{x^2}\right)$ $y'=e^{x^2}(2x)$ $y'=2xe^{x^2}$	**6.** $Dx\left(\cos\left(1-x^2\right)\right)$ $y'=-sen\left(1-x^2\right)(-2x)$ $y'=2xsen\left(1-x^2\right)$
7. $Dx\log\left(3x^2-5\right)$ $y'=\frac{1}{3x^2-5}\log e(6x)$ $y'=\frac{6x}{3x^2-5}\log e$	**8.** $Dx\left(e^{sen3x}\right)$ $y'=e^{sen3x}(\cos 3x)(3)$ $y'=3e^{sen3x}(\cos 3x)$
9. $Dx\left(3e^{x^3}\right)$ $y'=3e^{x^3}\left(3x^2\right)$ $y'=9x^2e^{x^3}$	**10.** $Dx(\ln(sen3x))$ $y'=\frac{1}{sen3x}(\cos 3x)(3)$ $y'=\frac{3\cos 3x}{sen3x}$

Para derivar funciones trascendentales puede requerirse aplicar las reglas de multiplicación, división o potencias al igual que en las funciones algebraicas. También es necesario un buen manejo de identidades trigonométricas.

Identidades trigonométricas básicas:

1. $sen^2 x+\cos^2 x=1$	**2.** $\tan x=\frac{senx}{\cos x}$	**3.** $\cot x=\frac{\cos x}{senx}$
4. $\cot x=\frac{1}{\tan x}$	**5.** $\csc x=\frac{1}{senx}$	**6.** $\sec x=\frac{1}{\cos x}$

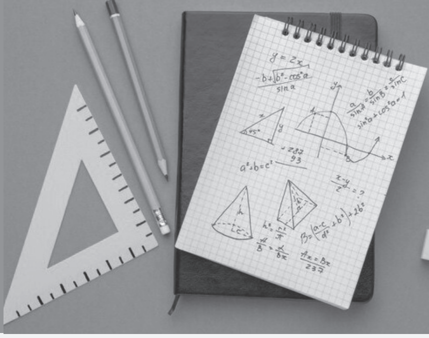
2 ACTIVIDAD

Deriva las siguientes funciones aplicando fórmulas de derivación:

Responde...

1. $Dx(3sen4x)$	10. $Dx(e^x - \cos x)$
2. $Dx(e^{-0.5x})$	11. $Dx(4sen5x + 3\cos x)$
3. $Dx(e^{3x+5})$	12. $Dx(sen^3(4x^2))$
4. $Dx(\cos 3x)$	13. $Dx\left(\frac{\cos x - 3senx}{senx}\right)$
5. $Dx\left(\frac{(2\cos 2x)}{x^3}\right)$	14. $Dx\left(\frac{senx}{x^2}\right)$
6. $Dx(3senx - 2\cos x)$	15. $Dx(sen^2 x + \cos^2 x)$
7. $Dx(\cot x)$	16. $Dx(e^x - 2x)$
8. $Dx(\sec x)$	17. $Dx(4x^2 \cos x)$
9. $Dx\left(\frac{3\cos x}{2senx}\right)$	18. $Dx\left(\frac{\ln x^5}{4x}\right)$

PROGRESIÓN 15



Considera y revisa algunas ideas subyacentes al teorema fundamental del cálculo.

CATEGORÍAS	METAS DE APRENDIZAJE
C2. Procesos de intuición y razonamiento	**M7.** Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.
SUBCATEGORÍAS	
SC2.1. Capacidad para observar y conjeturar **SC2.2.** Pensamiento intuitivo	

Contenidos específicos de la progresión

15.1. Teorema fundamental del cálculo.
15.2. Carácter intuitivo del área bajo la curva.

Descripción de la progresión:

En esta progresión se pretende introducir a las y los estudiantes al concepto de la integración, reconociendo que a través de la evolución del cálculo algunos problemas fueron resueltos mediante métodos infinitesimales aplicando límites y derivación, y otros problemas como el área bajo una curva se resuelven mediante sumatorias, las cuales son antecedentes del concepto de la integral de una función.

A través del Teorema fundamental del cálculo se llegará a la conclusión que la diferenciación y la integración son procesos inversos.

Teorema fundamental del Cálculo

Aunque el matemático inglés Isaac Barrow fue el primero en reconocer que la integración y la diferenciación son operaciones inversas y que el matemático suizo Jacob Bernoulli acuñó la palabra integral como término del Cálculo en el año 1690, se consideran a Isaac Newton y Gotfried Leibniz los que demostraron que existe una relación lógica entre la derivación y la integración. Y esta es la relación que se establece mediante el **teorema fundamental del cálculo**.

Tanto Newton como Leibniz pusieron de manifiesto que los problemas de tangentes y el cálculo de áreas eran inversos, por lo que para resolver uno de ellos bastaba invertir el método para hallar el otro. Ellos plantearon el cálculo completamente desligado de la geometría y lo trabajan con conceptos algebraicos y con métodos generales para cualquier tipo de función o de problema.

Mediante el teorema fundamental del cálculo se indica que la integración es inversa de la derivación y viceversa, por lo que si se integra una función y luego se deriva, la función original se restaura.

Este teorema facilita el cálculo de integrales definidas cuando se conoce la función primiiva del integrando. Por ello, debemos comprender el concepto de **primitiva** de la función.

Ejemplos:

A) Consideramos que $f'(x)=2x$, es la derivada de una función F(x). Necesitamos saber cuál es la función original o primitiva (antes de ser derivada).

- Si la función derivada tiene exponente 1 en la variable x, entonces la función original tendrá exponente 2, y como en el proceso de derivación, el exponente multiplica al coeficiente, entonces establecemos que la **función primitiva** es $f'(x)=x^2$, para que cuando se derive quede la expresión $f'(x)=2x$.

B) Si consideramos que $f'(x) = 3x^2$, es la derivada de una función F(x). ¿Cuál es su función primitiva?

- Si la función derivada tiene exponente 2 en la variable x, entonces la función original tendrá exponente 3, por lo que podemos establecer que la función primitiva es $f'(x) = 3x^2$, para que cuando se derive quede la expresión $f'(x) = 3x^2$.

C) Si la expresión derivada es $f'(x) = 3$, ¿cuál es su función primitiva?

- Como podrá observarse, un término constante tiene una variable con exponente cero, por lo que su expresión primitiva deberá ser una variable con exponente 1, por tal razón, la primitiva será $f'(x) = 3$.

Dado que se ha establecido que una función $f'(x)$ se puede derivar, entonces su operación inversa será una antiderivada de esa función, por lo que encontrar la función primitiva es también determinar su antiderivada.

Si f´(x)=2x^2+x+2 es una función derivada, su primitiva o antiderivada es $F(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x$

Observa que si derivamos la función *F(x)* obtendremos la función *f´(x).*

1 ACTIVIDAD

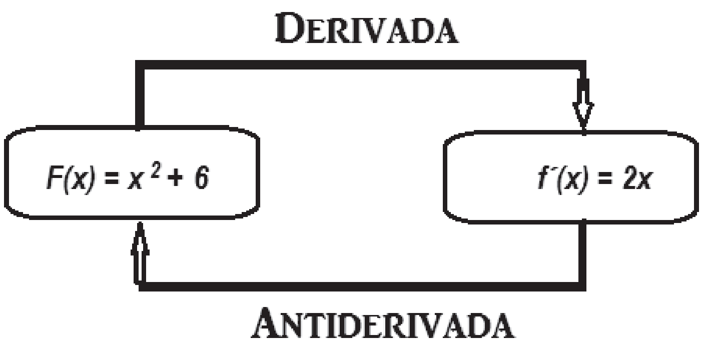
Determina la antiderivada o primitiva de las siguientes funciones:

Responde...

1) $f'(x)=6x^2+4$	6) $f'(x)=9x^2+4x$
2) $f'(x)=8x^3+5$	7) $f'(x)=5x^4$
3) $f'(x)=x^2-x$	8) $f'(x)=9-12x^3$
4) $f'(x)=12x^2-4x$	9) $f'(x)=15x^2-8x$
5) $f'(x)=6x^5$	10) $f'(x)=x^4$

Antiderivada de una función

Una función F(x) definida en un intervalo I es una antiderivada de f(x) si se cumple que $f(x)=F'(x)$ para toda x en I.

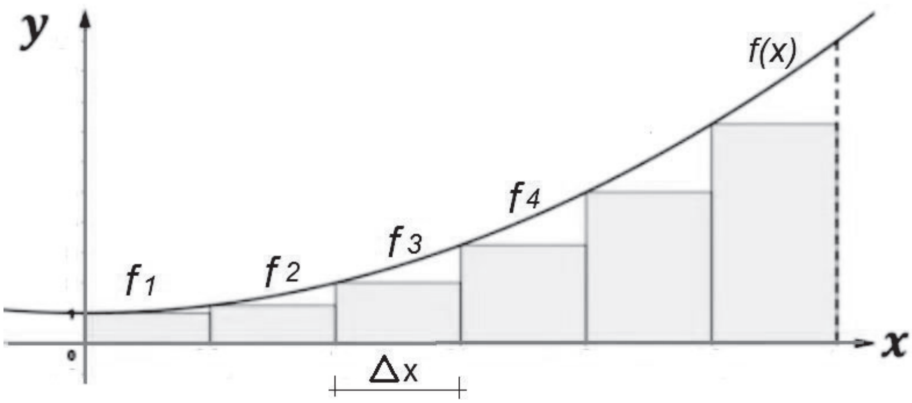


Si ***F(x)*** es una antiderivada de **f(x)**, entonces si c es una constante, también **F(x) + c** es antiderivada de **f(x)**.

Área de una curva como una suma de áreas de rectángulos

Como ya se mencionó, los matemáticos e investigadores del siglo XVII se dieron a la tarea de determinar el área bajo una curva, a partir de colocar un conjunto de rectángulos en su interior, realizando la sumatoria de sus áreas.

Se observa que a medida que se hace infinitamente grande la cantidad de rectángulos, mayor es la exactitud del área bajo la curva.



Esta suma de rectángulos fue originalmente establecida como:

$$A = \sum f(x)\,\Delta_x$$

En la que Δx se refiere al ancho de cada rectángulo, f(x) la altura de los mismos de acuerdo a la función, Σ "sigma" es el símbolo que indica la sumatoria.

A Leibniz le debemos la simbología que actualmente se utiliza para describir esta suma y que hace referencia a la antiderivada con respecto a la variable x.

$$\int f(x)dx$$

Así, la simbología $\int \; dx$, sutituye a la de sumatoria $\sum \Delta_x$.

Ya conocida esta nueva simbología, el **teroema fudamental del cálculo** se expresa finalmente de la siguiente manera:

Si la función ***f*** es continua, y $f(x) = F'(x)$ entonces $\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a)$

En un posterior curso de Cálculo Integral tendremos la oportunidad de utilizar este teorema para determinar la integral de diversas funciones, tanto algebraicas como trascendentales, los diversos métodos de integración y sus aplicaciones en cálculo de áreas, volumen de cuerpos o sólidos de revolución, entre otras.

REFERENCIAS

PROGRESIONES 1 - 3

- Castilla, A. E. (23 de 05 de 2013). www.webcolegios.com. Recuperado de: https://www.webcolegios.com/file/36d4cc.pdf
- Levy, J. (2016). La curiosa historia de las matemáticas. México: Editorial LIBSA. ISBN: 978-84-662-3397-2
- Sullivan, M. (1997). Precalculo. México: Pearson Educación.
- Purcell, E. y Varberg, D. (1992). Cálculo diferencial e integral. México: Prentice Hall Hispanoamericana.
- Purcell, E., Varberg, D. y. Rigdon, S. (2007). Cálculo diferencial e integral. PEARSON EDUCACIÓN, México. ISBN: 978-970-26-0989-6.
- Stewart, J. (2006). Cálculo. Conceptos y contextos. (4ta. Ed.). México: International Thomson Editores.
- Yumpu.com. (s. f.). Taller de Matemáticas IV. yumpu.com. Recuperado de: https://goo.su/LPm9ylm

IMÁGENES

- Pauliukevich, Y. (2022, 25 noviembre). Descarga el vector libre de regalías cinta transportadora en fábrica en vista frontal y superior 14774508 de. . . Vecteezy. https://n9.cl/3yyg8
- Miranda, L. G. O. (2019, 4 mayo). Crecimiento y desarrollo. ABC Color. https://n9.cl/ywq37 (Imagen de los niños)
- Voleymundo. (2016, 30 mayo). Efecto Magnus en voleibol y voley playa. ¿Cómo utilizar la física a nuestro favor? Voley Por el Mundo. https://goo.su/uLaU7f

PROGRESIÓN 4

- Ibáñez, P., & García, G. (2011). Matemáticas IV. México: Cengage.
- Sullivan, M. (1997). Precálculo. México: Pearson.
- Marta. (2024, 1 febrero). Máximos y mínimos absolutos y relativos | Superprof. Material Didáctico - Superprof. Recuperado de: https://goo.su/TlecKM
- Calculadora Suite - GeoGebra. (s. f.). Recuperado de: https://www.geogebra.org/calculator
- Continuidad de funciones - hiru. (s. f.). Recuperado de: https://onx.la/31f14

IMÁGENES

- Figuras 1 a 3. Crecimiento de una función. Decrecimiento de una función. Función constante. Extremos relativos. (s. f.). https://goo.su/zFuWJZy
- Figura 4. Máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función. (s. f.). https://onx.la/163ec
- PROGRESIONES 5 - 7
- Barnett, R. (2014). Precálculo. Álgebra, geometría analítica y trigonometría. México: Editorial Limusa, ISBN 10: 9681839919
- Cuellar, J. (2006). Matemáticas IV Relaciones y funciones. México: Ed. Mc.Graw-Hill Interamericana. ISBN: 970-10-5800-3

- Purcell, E., Varberg, D. y. Rigdon, S. (2007). Cálculo diferencial e integral. PEARSON EDUCACIÓN, México. ISBN: 978-970-26-0989-6.
- Stewart, J. (2006). Cálculo. Conceptos y contextos. (4ta. Ed.). México: International Thomson Editores.
- Sandoval, L., Martínez, M., Lugo, O., Montes, M. (2008). Cálculo Diferencial e integral. México: Ed. Santillana.
- Imagen 1. Anisimova, I. (s. f.). Nature scene - two rocks against the sky. iStock. https://www.istockphoto.com/es/vector/dos-acantilados-gm1457619303-492376083
- Julián, C. (2019, 6 abril). ¿Cómo determinar si un límite no existe? Laplacianos. https://laplacianos.com/como-determinar-si-un-limite-no-existe/

PROGRESIONES 8 - 11

- Barnett, R. (2014). Precálculo. Álgebra, geometría analítica y trigonometría. México: Editorial Limusa, ISBN 10: 9681839919
- Cuellar, J. (2006). Matemáticas IV Relaciones y funciones. México: Ed. Mc.Graw-Hill Interamericana. ISBN: 970-10-5800-3
- Purcell, E., Varberg, D. y. Rigdon, S. (2007). Cálculo diferencial e integral. PEARSON EDUCACIÓN, México. ISBN: 978-970-26-0989-6.
- Stewart, J. (2006). Cálculo. Conceptos y contextos. (4ta. Ed.). México: International Thomson Editores.
- Sandoval, L., Martínez, M., Lugo, O., Montes, M. (2008). Cálculo Diferencial e integral. México: Ed. Santillana.
- Figura 1 . Ruiz, C. (2022, 25 abril). Carlos Ruiz en LinkedIn: Existen sobre todo 4 notaciones distintas de la función de la derivada. . . | 10 comentarios. https://es.linkedin.com/posts/carlos-colegio-bourbaki_existen-sobre-todo-4-notaciones-distintas-activity-6924451388546572288-mPC_
- Rubalcava, C. A. (s. f.). Reglas de derivación. https://www.uacj.mx/CGTI/CDTE/JPM/Documents/IIT/sterraza/mate2016/DERIVADA/der_reg.html
- Academia de matemáticas. (2011). guía de aprendizaje de cálculo diferencial. cecyt n° 11 “Wilfrido Massieu” del IPN.
- Ibáñez, P., & García, G. (2006). Matemáticas V Calculo Diferencial. Thomson. (Ibáñez & García, 2006)
- Purcell, E., Varderg, D., & Rigdon, S. (2003). Cálculo Diferencial e Integral (8va ed.). Pearson Educación.

PROGRESIÓN 12

- Prezi, C. G. C. O. (s. f.). La Función exponencial y sus aplicaciones en situaciones cotidianas. Recuperado de https://prezi.com/p/pahbsy5sckry/la-funcion-exponencial-y-sus-aplicaciones-en-situaciones-cotidianas/
- CK-12 Foundation. (s. f.). CK-12 Foundation. Recuperado de https://www.ck12.org/book/ck-12-conceptos-de-%c3%a1lgebra-i-en-espa%c3%b1ol/section/8.12/
- Calculator Suite - GeoGebra. (s. f.). Recuperado de: https://www.geogebra.org/calculator
- Sullivan, M. (1997). Precálculo. México: Pearson.

PROGRESIONES 13 - 15

- Figura 1. El Círculo Unidad en Trigonometría. (s. f.). https://content.nroc.org/DevelopmentalMath/TEXTGROUP-1-19_RESOURCE/U19_L1_T3_text_final_es.html
- Figura 2. Libretexts. (2022, noviembre 2). 5.2: Ángulos. LibreTexts Español. https://n9.cl/6huz3
- Figura 3. Radianes. (s. f.). https://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/radianes.html
- Figura 4. Triangulo rectángulo.
- Figura 5. Funciones en el plano.
- Figura 6. Guzman, J. H. (2022, 3 junio). El Círculo Unitario. Neurochispas. https://www.neurochispas.com/wiki/el-circulo-unitario/
- Figura 7. Círculo unitario. (s. f.).
- https://belver.clavijero.edu.mx/cursos/nme/semestre2/matematicas_2/s3/contenidos/crculo_unitario.html
- Figura 8. Uceda, A. C. (2024, 21 enero). Signo de las razones trigonométricas. Lecciones de Mates. https://www.leccionesdemates.com/blog/signo-de-las-razones-trigonometricas/
- Figura 9. Elementos de la onda. https://images.app.goo.gl/fCqb9RtUNbZhoTNi7
- Módulo 5. Trigonometría. (2014). FCAGLP. Recuperado 13 de mayo de 2024, de https://fcaglp.unlp.edu.ar/area-docente/Ingreso-2014/Modulos-2014/
- Colegio Nacional de Matemáticas [CONAMAT]. (2009). Geometría y trigonometría (1.a ed.). Pearson.

COBACH BC

COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE BAJA CALIFORNIA